Comparative Study on Numerical Simulation Method for Depth-averaged Flow and River Bed Variation in Generalized Coordinate System

メタデータ	言語: jpn 出版者: 公開日: 2019-03-22 キーワード (Ja): キーワード (En): generalized coordinate system, depth-averaged flow, river bed variation, numerical simulation 作成者: 浪平, 篤, 髙木, 強治, 後藤, 眞宏, 小林, 宏康 メールアドレス: 所属:
URL	https://doi.org/10.24514/00002240

〔農工研報 51
165 ～ 193, 2012〕

一般座標系における平面 2 次元流れと河床変動の数値シミュレーション手法に関する比較研究

浪平篤 *・髙木強治 **・後藤眞宏 *・小林宏康 ***

目　次

Ⅰ　緒　言……………………………………………… 165
Ⅱ　平面 2 次元流れに関する手法の比較と提案…… 166
　1 デカルト座標系における基礎方程式と変数の配置方法…………………………………………… 166
　2 一般座標系における基礎方程式と変数の配置方法…………………………………………… 166
　3 計算方法……………………………………………… 172
Ⅲ　河床変動に関する手法の比較と提案…………… 176
　1 掃流砂量式…………………………………………… 176
　2 掃流砂の連続式……………………………………… 178
　3 計算方法……………………………………………… 178
　4 現場に適用する際の留意事項…………………… 179
Ⅳ　提案する手法の検証……………………………… 179
　1 検証内容……………………………………………… 179
　2 1 次元ダムブレイク流れ ………………………… 179
　3 2 次元ダムブレイク流れ ………………………… 183
　4 模擬河川における流れ…………………………… 183
　5 蛇行水路における河床変動……………………… 184
Ⅴ　結　言……………………………………………… 190
参考文献………………………………………………… 191
Summary………………………………………………… 193

Ⅰ 緒 言

一般座標系における平面 2 次元流れと河床変動の数値シミュレーションについては，水工学の分野ではこれまでに数多くの研究が行われてきており，河道計画や河川構造物の改修等における調査設計手法の一つとして国の技術基準（建設省，1997）や各種図書（土木学会，1999；土木学会，2002）に掲載されるだけでなく，フリーソフトが公開される（国土技術研究センター，2006；北海道河川防災研究センター，2008）までに，その技術は確立されつつある。本シミュレーションは，農業水利の分野の中でも，頭首工の建設や改修等に係る調査設計や性能照査において堆砂や洗掘等の予測および対策の検討を行う際に，有効な手段になると考えられる（例えば，川島・福岡，1995；清水ら，1999；福岡ら，2004；忠津ら，2010）。しかしながら，独自の技術の確立や水工学の分野における研究成果の導入は十分に進んでおらず，国の設計基準（農林水産省，2009）や各種図書（農業農村工学会，2010a；農業農村工学会，2010b）にも関連する記載が少ないのが現状である。多額の費用を要する水理模型実験の実施が近年の社会経済情勢の影響によって困難になりつつあることを踏まえると，頭首工に関する調査設計や性能照査において本シミュレーションを活用する必要性は今後高まると考えられ，農業水利の分野に本技術を導入する意義は大きい。

数多くある水工学の分野における研究成果が農業水利の分野に導入されてこなかった原因はいくつかあると考えられる。最も大きな原因として，一般座標系における平面 2 次元流れの基礎方程式はデカルト座標系とは異なって型式が統一されておらず，また，各変数の配置方法や計算方法の詳細が各種図書や論文に明確に示されていないことが多いため，農業水利に係る研究者や技術者には導入すべき手法の取捨選択が困難であることが考えられる。河床変動の計算方法についても，各種図書や論文にはその詳細が十分に掲載されていないことが多く，上記の研究者や技術者にとってその導入は容易ではないことが考えられる。なお，デカルト座標系とは互いに直交している直線が座標軸となる座標系，一般座標系とは数値シミュレーションの対象とする空間の形状に沿った任意の曲線が座標軸となる座標系をいう。

そこで本報告では，一般座標系における平面 2 次元流れと河床変動の数値シミュレーションについて，水工学の分野における既往の手法で適用されている基礎方程式，変数の配置方法，計算方法等の詳細を示すとともに，それらの比較検討を行い，農業水利の分野において比較的容易に普及しうると考えられる手法を提案する。比較検討の際には，流体力学の数値シミュレーションの分野

*資源循環工学研究領域　エネルギーシステム担当
**水利工学研究領域　基幹施設水理担当
***技術移転センター長
平成 23 年 12 月 15 日受理
キーワード：一般座標系，平面 2 次元流れ，河床変動，数値シミュレーション

における手法も参考とする。

本報告の構成としては，まずⅡ章では平面 2 次元流れの数値シミュレーション手法を対象とする。その際，デカルト座標系における標準的と考えられる基礎方程式と変数の配置方法について解説した後に，一般座標系について前述の比較検討と提案を行う。次にⅢ章では河床変動の数値シミュレーション手法を対象として比較検討と提案を行う。最後にⅣ章において本報告で提案する手法の妥当性を理論値や実験値との比較等に基づいて検証する。

なお，本報告の一部は，新たな農林水産政策を推進する実用技術開発事業「農業水利施設のストックマネジメント高度化技術の開発(代表：中　達雄)」の一部として行った。ここに記して，心より謝意を表する。

Ⅱ　平面 2 次元流れに関する手法の比較と提案

1　デカルト座標系における基礎方程式と変数の配置方法

デカルト座標系における平面 2 次元流れの基礎方程式は，一般に以下のように表記される。

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial M_j}{\partial x_j}=0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial M_i}{\partial t}+\frac{\partial\left(u_j M_i\right)}{\partial x_j}=-gh\frac{\partial(z+h)}{\partial x_i}-\frac{\tau_{bi}}{\rho}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left\{v_t\left(\frac{\partial M_i}{\partial x_j}+\frac{\partial M_j}{\partial x_i}\right)\right\} \tag{2}$$

式(1)は連続式，式(2)は運動方程式である。繰返し添字は総和規約に従うものとし，このことは以降も共通とする。t は時間，x_i はデカルト座標(i = 1, 2)，u_i は x_i 軸方向の流速成分，M_i は x_i 軸方向の単位幅流量，z は河床高，h は水深，ρ は水の密度(ρ = 1.0 × 10^{3}kg/m^3)，g は重力加速度(g = 9.8m/s^2)，τ_{bi} は x_i 軸方向の底面摩擦応力，v_t は渦動粘性係数である。式(2)において，左辺第 2 項は対流項，右辺第 1 項は水面勾配項，右辺第 2 項は底面摩擦項，右辺第 3 項は拡散項である。なお，拡散項における単位幅流量の勾配が，流速の勾配と水深の積で表記される場合もある。

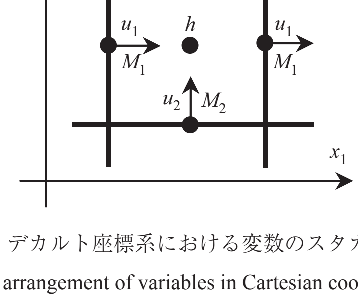


Fig.1　デカルト座標系における変数のスタガード配置
Staggered arrangement of variables in Cartesian coordinate system

式(1), (2)を総和規約に従って書き下すと，以下のようになる。

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial M_1}{\partial x_1}+\frac{\partial M_2}{\partial x_2}=0 \tag{3}$$

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial M_1}{\partial t}+\frac{\partial\left(u_1 M_1\right)}{\partial x_1}+\frac{\partial\left(u_2 M_1\right)}{\partial x_2}\\
&\quad=-gh\frac{\partial(z+h)}{\partial x_1}-\frac{\tau_{b1}}{\rho}\\
&\qquad+\frac{\partial}{\partial x_1}\left\{v_t\left(\frac{\partial M_1}{\partial x_1}+\frac{\partial M_1}{\partial x_1}\right)\right\}+\frac{\partial}{\partial x_2}\left\{v_t\left(\frac{\partial M_1}{\partial x_2}+\frac{\partial M_2}{\partial x_1}\right)\right\}\\
&\frac{\partial M_2}{\partial t}+\frac{\partial\left(u_1 M_2\right)}{\partial x_1}+\frac{\partial\left(u_2 M_2\right)}{\partial x_2}\\
&\quad=-gh\frac{\partial(z+h)}{\partial x_2}-\frac{\tau_{b2}}{\rho}\\
&\qquad+\frac{\partial}{\partial x_1}\left\{v_t\left(\frac{\partial M_2}{\partial x_1}+\frac{\partial M_1}{\partial x_2}\right)\right\}+\frac{\partial}{\partial x_2}\left\{v_t\left(\frac{\partial M_2}{\partial x_2}+\frac{\partial M_2}{\partial x_2}\right)\right\}
\end{aligned}\right. \tag{4}$$

τ_{bi} は Manning 則に基づけば次式となる。

$$\tau_{bi}=\frac{\rho g n_b{}^2 u_i\sqrt{u_j u_j}}{h^{1/3}} \tag{5}$$

ここで，n_b は底面についての Manning の粗度係数である。

v_t の評価式としては，様々な乱流モデルがあるが，平面 2 次元流れの数値シミュレーションで最も多く使用されているのは，次式による 0 方程式モデルである(例えば，福岡ら，1998；小川ら，1999；清水ら，1999；長田，1999)。

$$v_t=\frac{\kappa}{6}u_* h \tag{6}$$

ここで，κ はカルマン定数(κ = 0.4)，u_* は摩擦速度であり次式から得られる。

$$u_*=\sqrt{\sqrt{\frac{\tau_{bj}}{\rho}}\sqrt{\frac{\tau_{bj}}{\rho}}} \tag{7}$$

なお，合流部を有する直線水路の流れに対する平面 2 次元流れの数値シミュレーションでは，0 方程式モデルと標準型 $k-\varepsilon$ モデルとで再現性に大きな差がみられなかったことが確認されている(舛甚・清水，2005)。

デカルト座標系では，各変数は一般に **Fig. 1** のようにスタガード配置される。このように配置することにより，質量および運動量について保存性のよい離散化を行いやすくなる。このことは式(3), (4)を **Fig. 1** と比較することによって容易に理解される。

2　一般座標系における基礎方程式と変数の配置方法

河川は人工水路とは異なって蛇行していることが少なくない。また，河川における横断測量断面は，その全てが平行していることはなく，河川の湾曲に応じて流下方向とほぼ直角に設定されている。このため，デカルト座標系より

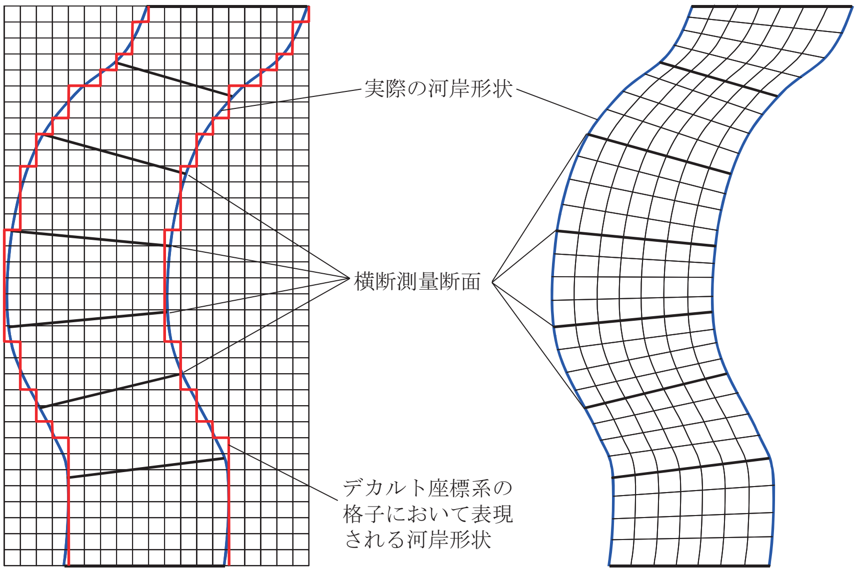


Fig.2　デカルト座標系と一般座標系における河川の計算格子を比較した概念図
Comparative conceptual diagram of grid for river in Cartesian coordinate system and generalized curvilinear coordinate system

も一般座標系の方が河岸形状の表現や計算格子の作成において有利である。デカルト座標系と一般座標系における河川の計算格子を比較した概念図を **Fig. 2** に示す。

一般座標系における平面 2 次元流れの基礎方程式はデカルト座標系とは異なって型式が統一されていない。特に運動方程式に大きな違いがある。また，各変数の配置方法が明確に示されていないことが多い。そこで本節では，水工学の分野において適用事例が比較的多く代表的と考えられるものを整理する。そして，それらの比較検討を行い，農業水利の分野において比較的容易に普及しうると考えられる基礎方程式の型式と変数の配置方法を提案する。

a　基本変数にデカルト座標物理成分，対流速度に一般座標反変成分を用いる型式（清水ら，1991；長田，1999；浪平・髙木，2009）

本型式の導出方法としては，流体力学の数値シミュレーション（越塚，1997；梶島，1999）で多く行われているように，まず，空間偏微分を chain rule と呼ばれる式(8)によって，流速と単位幅流量をそれぞれ式(9)，(10)によって一般座標反変成分に変換する。

$$\frac{\partial}{\partial x_i}=\frac{\partial \xi^j}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial \xi^j} \tag{8}$$

$$U^i=\frac{\partial \xi^i}{\partial x_j}u_j \tag{9}$$

$$Q^i=\frac{\partial \xi^i}{\partial x_j}M_j \tag{10}$$

これらの変換に加え，後述する若干の計算を行うことにより，式(1)，(2)から式(11)，(12)が得られる。

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{1}{J}\frac{\partial JQ^j}{\partial \xi^j}=0 \tag{11}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial M_i}{\partial t}+\frac{1}{J}\frac{\partial\left(JU^jM_i\right)}{\partial \xi^j}&=-gh\frac{\partial \xi^j}{\partial x_i}\frac{\partial(z+h)}{\partial \xi^j}-\frac{\tau_{bi}}{\rho}\\&\quad+\frac{\partial \xi^k}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial \xi^k}\left\{\nu_t\left(\frac{\partial \xi^l}{\partial x_j}\frac{\partial M_i}{\partial \xi^l}+\frac{\partial \xi^m}{\partial x_i}\frac{\partial M_j}{\partial \xi^m}\right)\right\}\end{aligned} \tag{12}$$

ここで，ξ^i は一般座標（i = 1, 2），U^i は ξ^i 軸方向の流速の一般座標反変成分，Q^i は ξ^i 軸方向の単位幅流量の一般座標反変成分である。デカルト座標系と同様に，式(12)において左辺第 2 項は対流項，右辺第 1 項は水面勾配項，右辺第 2 項は底面摩擦項，右辺第 3 項は拡散項である。

流速の一般座標系反変成分とは，格子幅で無次元化された，格子方向の流速成分である。デカルト座標系による物理空間と一般座標系による計算空間との関係を概念的に示すと **Fig. 3** のようになる。

座標変換に用いられる各係数については，次式を用いて格子毎に算出する。

$$\begin{aligned}&\frac{\partial \xi^1}{\partial x_1}=\frac{1}{J}\frac{\partial x_2}{\partial \xi^2},\ \frac{\partial \xi^1}{\partial x_2}=-\frac{1}{J}\frac{\partial x_1}{\partial \xi^2},\ \frac{\partial \xi^2}{\partial x_1}=-\frac{1}{J}\frac{\partial x_2}{\partial \xi^1},\\&\frac{\partial \xi^2}{\partial x_2}=\frac{1}{J}\frac{\partial x_1}{\partial \xi^1},\ J=\frac{\partial x_1}{\partial \xi^1}\frac{\partial x_2}{\partial \xi^2}-\frac{\partial x_1}{\partial \xi^2}\frac{\partial x_2}{\partial \xi^1}\end{aligned} \tag{13}$$

これらのうち J はヤコビアンと呼ばれ，2 次元では格子の面積に相当する。$\partial x_i/\partial \xi^j$ は，**Fig. 3** および式(14)から得られる。

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial x_1}{\partial \xi^1} &= \frac{x_1(ne)+x_1(se)}{2} - \frac{x_1(nw)+x_1(sw)}{2} \\
\frac{\partial x_1}{\partial \xi^2} &= \frac{x_1(ne)+x_1(nw)}{2} - \frac{x_1(se)+x_1(sw)}{2} \\
\frac{\partial x_2}{\partial \xi^1} &= \frac{x_2(ne)+x_2(se)}{2} - \frac{x_2(nw)+x_2(sw)}{2} \\
\frac{\partial x_2}{\partial \xi^2} &= \frac{x_2(ne)+x_2(nw)}{2} - \frac{x_2(se)+x_2(sw)}{2}
\end{aligned}
\tag{14}
$$

ここで，例えば $x_1(ne)$ とは，格子点 ne における x_1 であることを示す。

式(11)，(12)それぞれの左辺第 2 項では，流速の一般座標系反変成分 U^i および単位幅流量の一般座標系反変成分 Q^i を単独で扱わず，J が乗じられた JU^i および JQ^i として扱う点に特徴がある。U^i は格子幅で無次元化されており，Q^i はその U^i に h を乗じたものであるため，J が乗じられることによりフラックスとなる。ここでフラックスとは格子の界面を通過する流量の積分である。

前述した，式(11)，(12)を導出するための若干の計算とは，式(1)の左辺第 2 項の変換を例とすると，以下の通りである。まず式(8)を用いた変換により，

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial M_j}{\partial x_j} &= \frac{\partial M_1}{\partial x_1} + \frac{\partial M_2}{\partial x_2} \\
&= \frac{\partial \xi^1}{\partial x_1}\frac{\partial M_1}{\partial \xi^1} + \frac{\partial \xi^2}{\partial x_1}\frac{\partial M_1}{\partial \xi^2} + \frac{\partial \xi^1}{\partial x_2}\frac{\partial M_2}{\partial \xi^1} + \frac{\partial \xi^2}{\partial x_2}\frac{\partial M_2}{\partial \xi^2} \\
&= \frac{1}{J}J\frac{\partial \xi^1}{\partial x_1}\frac{\partial M_1}{\partial \xi^1} + \frac{1}{J}J\frac{\partial \xi^2}{\partial x_1}\frac{\partial M_1}{\partial \xi^2} + \frac{1}{J}J\frac{\partial \xi^1}{\partial x_2}\frac{\partial M_2}{\partial \xi^1} + \frac{1}{J}J\frac{\partial \xi^2}{\partial x_2}\frac{\partial M_2}{\partial \xi^2} \\
&= \frac{1}{J}\frac{\partial}{\partial \xi^1}\left(J\frac{\partial \xi^1}{\partial x_1}M_1\right) + \frac{1}{J}\frac{\partial}{\partial \xi^2}\left(J\frac{\partial \xi^2}{\partial x_1}M_1\right) + \frac{1}{J}\frac{\partial}{\partial \xi^1}\left(J\frac{\partial \xi^1}{\partial x_2}M_2\right) \\
&\quad + \frac{1}{J}\frac{\partial}{\partial \xi^2}\left(J\frac{\partial \xi^2}{\partial x_2}M_2\right) - \frac{1}{J}M_1\frac{\partial}{\partial \xi^1}\left(J\frac{\partial \xi^1}{\partial x_1}\right) - \frac{1}{J}M_1\frac{\partial}{\partial \xi^2}\left(J\frac{\partial \xi^2}{\partial x_1}\right) \\
&\quad - \frac{1}{J}M_2\frac{\partial}{\partial \xi^1}\left(J\frac{\partial \xi^1}{\partial x_2}\right) - \frac{1}{J}M_2\frac{\partial}{\partial \xi^2}\left(J\frac{\partial \xi^2}{\partial x_2}\right) \\
&= \frac{1}{J}\frac{\partial}{\partial \xi^1}\left(J\frac{\partial \xi^1}{\partial x_1}M_1 + J\frac{\partial \xi^1}{\partial x_2}M_2\right) + \frac{1}{J}\frac{\partial}{\partial \xi^2}\left(J\frac{\partial \xi^2}{\partial x_1}M_1 + J\frac{\partial \xi^2}{\partial x_2}M_2\right) \\
&\quad - \frac{1}{J}M_1\frac{\partial}{\partial \xi^1}\left(J\frac{\partial \xi^1}{\partial x_1}\right) - \frac{1}{J}M_1\frac{\partial}{\partial \xi^2}\left(J\frac{\partial \xi^2}{\partial x_1}\right) - \frac{1}{J}M_2\frac{\partial}{\partial \xi^1}\left(J\frac{\partial \xi^1}{\partial x_2}\right) \\
&\quad - \frac{1}{J}M_2\frac{\partial}{\partial \xi^2}\left(J\frac{\partial \xi^2}{\partial x_2}\right)
\end{aligned}
$$

となる。さらに式(10)を用いた変換により

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial M_j}{\partial x_j} &= \frac{1}{J}\frac{\partial JQ^1}{\partial \xi^1} + \frac{1}{J}\frac{\partial JQ^2}{\partial \xi^2} \\
&\quad - \frac{1}{J}M_1\frac{\partial}{\partial \xi^1}\left(J\frac{\partial \xi^1}{\partial x_1}\right) - \frac{1}{J}M_1\frac{\partial}{\partial \xi^2}\left(J\frac{\partial \xi^2}{\partial x_1}\right) \\
&\quad - \frac{1}{J}M_2\frac{\partial}{\partial \xi^1}\left(J\frac{\partial \xi^1}{\partial x_2}\right) - \frac{1}{J}M_2\frac{\partial}{\partial \xi^2}\left(J\frac{\partial \xi^2}{\partial x_2}\right)
\end{aligned}
$$

となる。ここで右辺第 3 項は式(13)より

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{J}M_1\frac{\partial}{\partial \xi^1}\left(J\frac{\partial \xi^1}{\partial x_1}\right) &= \frac{1}{J}M_1\frac{\partial}{\partial \xi^1}\left\{\left(\frac{\partial x_1}{\partial \xi^1}\frac{\partial x_2}{\partial \xi^2} - \frac{\partial x_1}{\partial \xi^2}\frac{\partial x_2}{\partial \xi^1}\right)\frac{\partial \xi^1}{\partial x_1}\right\} \\
&= \frac{1}{J}M_1\frac{\partial}{\partial \xi^1}\left(\frac{\partial x_2}{\partial \xi^2} - \frac{\partial x_2}{\partial \xi^2}\right) = 0
\end{aligned}
$$

となる。右辺第 4 ～ 6 項も同様にゼロとなる。この結果を総和規約に従って表記すると次式になる。

$$
\frac{\partial}{\partial \xi^k}\left(J\frac{\partial \xi^k}{\partial x_j}\right) = 0 \tag{15}
$$

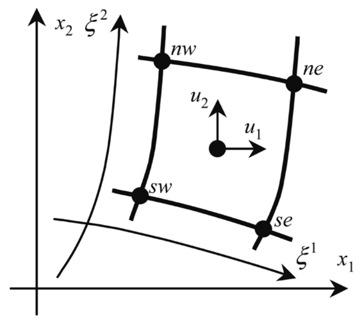
以上より，

$$
\frac{\partial M_j}{\partial x_j} = \frac{1}{J}\frac{\partial JQ^j}{\partial \xi^j}
$$

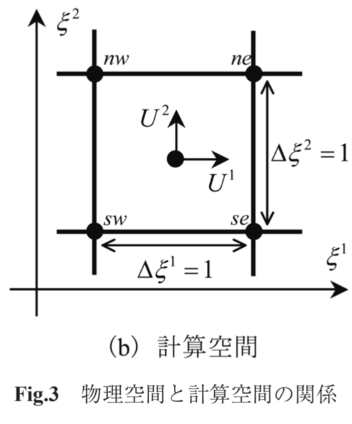
のように変換されることになる。式(2)の左辺第 2 項の変換も同様に行う。

流体力学の数値シミュレーションの分野では，このような型式の基礎方程式を用いる場合，コロケート配置と呼ばれる方法で変数が配置される（越塚，1997；梶島，1999）。この方法を平面 2 次元流れに適用すると，**Fig. 4** の配置となる（浪平・髙木，2009）。なお，このときの JU^i および JQ^i は，次のようにして求める。まず，格子の中心で式(9)，(10)によって U^i，Q^i を求め，この位置で J を乗じる。次に，隣り合う 2 つの格子における値 JU^i，JQ^i をそれらの格子間の界面で補間する。補間する際には，通常，平均が行われる。

なお，一般座標系では，デカルト座標系のように単純



(a) 物理空間



(b) 計算空間

Fig.3 物理空間と計算空間の関係

Relationship between physical domain and computational domain

に **Fig. 5** のようにスタガード配置としても，流速と単位幅流量が必ずしも格子の界面に対する法線方向を向くわけではないため，その利点を活かせない。これを解決するため **Fig. 6** のような配置方法もあるが，これでは格子の界面毎に M_1 および M_2 の運動方程式を解く必要が生じるため，計算量は **Fig. 4** のコロケート配置と比較して 2 倍になり，効率がよくない。

b　基本変数および対流速度に一般座標反変成分を用いる型式（長田，1999；竹林，2005）

本型式では，連続式としては式(11)が用いられる。ξ^1 成分に関する運動方程式としては, $i = 1$ のときの式(12)に $\partial\xi^1/\partial x_1$ を乗じたものと $i = 2$ のときの式(12)に $\partial\xi^1/\partial x_2$

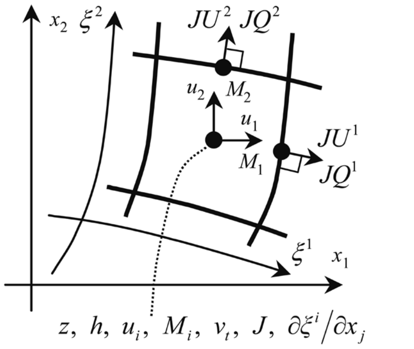


Fig.4　一般座標系における変数のコロケート配置
Collocated arrangement of variables in generalized curvilinear coordinate system

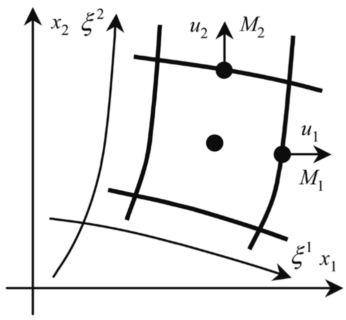


Fig.5　一般座標系における変数のスタガード配置（1 成分のみ）
Staggered arrangement of variables in generalized curvilinear coordinate system (1 component)

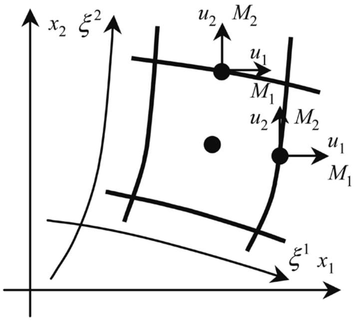


Fig.6　一般座標系における変数のスタガード配置（全成分）
Staggered arrangement of variables in generalized curvilinear coordinate system (all components)

を乗じたものを加えて得られる式が，ξ^2 成分に関する運動方程式としては，$i = 1$ のときの式(12)に $\partial\xi^2/\partial x_1$ を乗じたものと $i = 2$ のときの式(12)に $\partial\xi^2/\partial x_2$ を乗じたものを加えて得られる式が，それぞれ用いられる（長田，1999）。表記すると式(16)になる。

$$\frac{\partial Q^i}{\partial t} - M_j\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\xi^i}{\partial x_j}\right) + \frac{1}{J}\frac{\partial\left(JU^jQ^i\right)}{\partial\xi^j} - U^jM_k\frac{\partial}{\partial\xi^j}\left(\frac{\partial\xi^i}{\partial x_k}\right)$$
$$= -gh\frac{\partial\xi^i}{\partial x_k}\frac{\partial\xi^j}{\partial x_k}\frac{\partial(z+h)}{\partial\xi^j} - \frac{T_b{}^i}{\rho} + \frac{\partial\xi^i}{\partial x_l}\frac{\partial\xi^k}{\partial x_j}\frac{\partial D_{lj}}{\partial\xi^k} \tag{16}$$

ここで，T_b^i と D_{ij} は次式の通りである。

$$T_b{}^i = \frac{\partial\xi^i}{\partial x_j}\tau_{bj} = \frac{1}{h^{1/3}}\rho g n^2 U^i\sqrt{\left(\frac{\partial x_j}{\xi^k}U^k\right)\left(\frac{\partial x_j}{\xi^l}U^l\right)} \tag{17}$$

$$\begin{aligned} D_{ij} &= \nu_t\left(\frac{\partial M_i}{\partial x_j} + \frac{\partial M_j}{\partial x_i}\right) \\ &= \nu_t\left(\frac{\partial\xi^l}{\partial x_j}\frac{\partial M_i}{\partial\xi^l} + \frac{\partial\xi^m}{\partial x_i}\frac{\partial M_j}{\partial\xi^m}\right) \\ &= \nu_t\left\{\frac{\partial\xi^l}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial\xi^l}\left(\frac{\partial x_i}{\partial\xi^r}Q^r\right) + \frac{\partial\xi^m}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial\xi^m}\left(\frac{\partial x_j}{\partial\xi^s}Q^s\right)\right\} \end{aligned} \tag{18}$$

時間とともに解析領域の形状が変形しない場合には式(16)の左辺第 2 項はゼロとなる。

この型式では，a の型式と比較して項数が非常に多くなってプログラムの作成が煩雑になる上，座標変換係数のみの偏微分項である左辺第 4 項は式(15)とは異なりゼロにはならず生産項のように作用するため，運動量の保存性を保つことが困難になる。なお，流体力学の数値シミュレーションの分野ではこのような型式の適用事例は殆どない。

本型式における変数の配置としては，**Fig. 7** のような変則的なスタガード配置が提案されている（長田，1999）。a の型式では ξ^1 成分に関する運動方程式と ξ^2 成分に関する運動方程式はともに同じ検査区間で離散化できるが，本型式では同じ検査区間で離散化できないため，

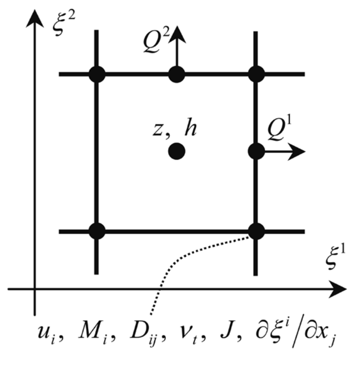


Fig.7　基本変数および対流速度に一般座標反変成分を用いる運動方程式の場合の変数の配置
Arrangement of variables in equation of motion in which generalized coordinate contravariant components are used as basic variable and convection velocity

a の型式よりも計算の効率が悪い。

c　基本変数および対流速度に一般座標反変成分を用いるが，単位幅流量を使用しない型式（Shimizu and Itakura，1991；清水，2003）

本型式では，連続式としては式(11)を単位幅流量を使わずに表記した式(19)が用いられる。

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{1}{J}\frac{\partial JU^j h}{\partial \xi^j}=0 \tag{19}$$

運動方程式としても単位幅流量が用いられずに表記した式(20)が用いられる。

$$\begin{aligned}&\frac{\partial U^i}{\partial t}+U^j\frac{\partial U^i}{\partial \xi^j}+\frac{\partial \xi^i}{\partial x_j}\frac{\partial^2 x_j}{\partial \xi^l \partial \xi^m}U^l U^m\\&=-g\frac{\partial \xi^i}{\partial x_k}\frac{\partial \xi^j}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial \xi^j}(z+h)-\frac{T_b^{\,i}}{\rho h}+\frac{\partial \xi^i}{\partial x_l}\frac{\partial \xi^k}{\partial x_j}\frac{\partial S_{lj}}{\partial \xi^k}\end{aligned} \tag{20}$$

ここで，T_b^i は式(17)，S_{ij} は式(21)の通りである。

$$\begin{aligned}S_{ij}&=\nu_t\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\\&=\nu_t\left\{\frac{\partial \xi^l}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial \xi^l}\left(\frac{\partial x_i}{\partial \xi^r}U^r\right)+\frac{\partial \xi^m}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial \xi^m}\left(\frac{\partial x_j}{\partial \xi^s}U^s\right)\right\}\end{aligned} \tag{21}$$

式(20)の導出方法は a や b の型式とは異なり明示されていないが，以下の通りと推察される。まず，式(2)を単位幅流量を使わずに表記する型式に変形し，この式において空間微分を式(8)，流速を式(9)によって変換し，さらに式(15)を適用することにより，式(22)を得る。

$$\begin{aligned}&\frac{\partial u_i}{\partial t}+\frac{1}{J}\frac{\partial\left(JU^j u_i\right)}{\partial \xi^j}\\&=-g\frac{\partial \xi^j}{\partial x_i}\frac{\partial(z+h)}{\partial \xi^j}-\frac{\tau_{bi}}{\rho h}\\&\quad+\frac{\partial \xi^k}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial \xi^k}\left\{\nu_t\left(\frac{\partial \xi^l}{\partial x_j}\frac{\partial u_i}{\partial \xi^l}+\frac{\partial \xi^m}{\partial x_i}\frac{\partial u_j}{\partial \xi^m}\right)\right\}\end{aligned} \tag{22}$$

そして，$i=1$ のときの式(22)に $\partial\xi^1/\partial x_1$ を乗じたものと $i=2$ のときの式(22)に $\partial\xi^1/\partial x_2$ を乗じたものを加えることにより，式(20)のうち ξ^1 成分に関する運動方程式が，$i=1$ のときの式(22)に $\partial\xi^2/\partial x_1$ を乗じたものと $i=2$ のときの式(22)に $\partial\xi^2/\partial x_2$ を乗じたものを加えることにより，式(20)のうち ξ^2 成分に関する運動方程式が得られる。但し，この過程でいくつかの近似や省略が行われていると考えられ，上記の通りの導出では式(20)と完全に合致する式が得られない。

この型式では，b の型式と同様，a の型式と比較して項数が非常に多くなってプログラムの作成が煩雑になる上，座標変換係数のみの偏微分項である左辺第 3 項は式(15)とは異なりゼロにはならず生産項のように作用するため，運動量の保存性を保つことが困難になる。なお，流体力学の数値シミュレーションの分野ではこのような型式の適用事例は殆どない。

本型式における変数の配置については，明示されていないが，本型式が用いられる場合には離散化手法として CIP 法が適用されることが多いため（例えば，清水，2003；伊東・清水，2003；Chang and Shimizu，2005），格子の中心もしくは角に全ての変数を配置している可能性が高い。なお，CIP 法の詳細については本報告の範疇を越えるので，専門書（矢部ら，2003）を参照されたい。

d　基本変数および対流速度に一般座標反変物理成分を用いる型式（渡邊ら，2002；福岡ら，2004）

本型式では，a の型式だけではなく b および c の型式とも大きく異なり，一般座標反変成分ではなく一般座標反変物理成分を基本変数としている。一般座標反変物理成分とは，格子幅で無次元化された一般座標反変成分を，デカルト座標系による物理空間の次元に戻したものである。但し，一般座標反変成分と同様，格子の方向の成分であることに変わりはない。

本型式における連続式は次式である。

$$J\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial \xi^j}\left(\frac{J\widetilde{U}^j h}{d\xi^j}\right)=0 \tag{23}$$

運動方程式は総和規約によって整理しがたい構成になっているので，ξ^1 成分および ξ^2 成分に関してそれぞれ以下に表記する。

$$\left\{\begin{aligned}&h\frac{\partial \widetilde{U}^1}{\partial t}+\widetilde{U}^1 h\frac{\partial \widetilde{U}^1}{\partial \widetilde{\xi}^1}+\widetilde{U}^2 h\frac{\partial \widetilde{U}^1}{\partial \widetilde{\xi}^2}\\&\quad-\widetilde{J}\left(\widetilde{U}^1 h\frac{\partial \theta^1}{\partial \widetilde{\xi}^1}+\widetilde{U}^2 h\frac{\partial \theta^1}{\partial \widetilde{\xi}^2}\right)\left(\widetilde{U}^2-\widetilde{U}^1\cos\theta^{21}\right)\\&\quad=-gh\left\{\frac{\partial(z+h)}{\partial \widetilde{\xi}^1}+\frac{\partial(z+h)}{\partial \widetilde{\xi}^2}\cos\theta^{21}\right\}\\&\quad\quad-\widetilde{T}_b^1+\frac{1}{J}\left\{\frac{\partial}{\partial \xi^1}\left(\frac{Jh}{d\xi^1}\widetilde{S}^{11}\right)+\frac{\partial}{\partial \xi^2}\left(\frac{Jh}{d\xi^2}\widetilde{S}^{12}\right)\right\}\\&\quad\quad-\widetilde{J}h\left\{\left(-\widetilde{S}^{11}\cos\theta^{21}+\widetilde{S}^{21}\right)\frac{\partial \theta^1}{\partial \widetilde{\xi}^1}\right.\\&\quad\quad\quad\left.+\left(-\widetilde{S}^{12}\cos\theta^{21}+\widetilde{S}^{22}\right)\frac{\partial \theta^1}{\partial \widetilde{\xi}^2}\right\}\\&h\frac{\partial \widetilde{U}^2}{\partial t}+\widetilde{U}^1 h\frac{\partial \widetilde{U}^2}{\partial \widetilde{\xi}^1}+\widetilde{U}^2 h\frac{\partial \widetilde{U}^2}{\partial \widetilde{\xi}^2}\\&\quad-\widetilde{J}\left(\widetilde{U}^1 h\frac{\partial \theta^2}{\partial \widetilde{\xi}^1}+\widetilde{U}^2 h\frac{\partial \theta^2}{\partial \widetilde{\xi}^2}\right)\left(\widetilde{U}^2\cos\theta^{21}-\widetilde{U}^1\right)\\&\quad=-gh\left\{\frac{\partial(z+h)}{\partial \widetilde{\xi}^1}\cos\theta^{21}+\frac{\partial(z+h)}{\partial \widetilde{\xi}^2}\right\}\\&\quad\quad-\widetilde{T}_b^2+\frac{1}{J}\left\{\frac{\partial}{\partial \xi^1}\left(\frac{Jh}{d\xi^1}\widetilde{S}^{21}\right)+\frac{\partial}{\partial \xi^2}\left(\frac{Jh}{d\xi^2}\widetilde{S}^{22}\right)\right\}\\&\quad\quad-\widetilde{J}h\left\{\left(-\widetilde{S}^{11}+\widetilde{S}^{21}\cos\theta^{21}\right)\frac{\partial \theta^2}{\partial \widetilde{\xi}^1}\right.\\&\quad\quad\quad\left.+\left(-\widetilde{S}^{12}+\widetilde{S}^{22}\cos\theta^{21}\right)\frac{\partial \theta^2}{\partial \widetilde{\xi}^2}\right\}\end{aligned}\right. \tag{24}$$

ここで，$\widetilde{U}^i$，$\widetilde{T}^i$，$\widetilde{S}^{ij}$ はそれぞれ u_i，τ_{bi}（式(5)），S_{ij}（式(21)）

を一般座標反変物理成分に変換したものである。$\widetilde{U}^i$ の変換式のみ以下に表記する。

$$\widetilde{U}^i=\frac{\partial\widetilde{\xi}^i}{\partial x_j}u_j$$

空間偏微分の計算は次式のように行う。

$$\frac{\partial}{\partial\widetilde{\xi}^j}=\frac{\partial}{d\xi^j\partial\xi^j}$$

座標変換に用いられる各係数については，次式を用いて算出する。

$$d\xi^1=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial\xi^1}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\xi^1}{\partial x_2}\right)^2}}\ ,\ d\xi^2=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial\xi^2}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\xi^2}{\partial x_2}\right)^2}}$$

$$\frac{\partial\widetilde{\xi}^1}{\partial x_1}=d\xi^1\frac{\partial\xi^1}{\partial x_1}=\cos\theta^1,\ \frac{\partial\widetilde{\xi}^1}{\partial x_2}=d\xi^1\frac{\partial\xi^1}{\partial x_2}=\sin\theta^1$$

$$\frac{\partial\widetilde{\xi}^2}{\partial x_1}=d\xi^2\frac{\partial\xi^2}{\partial x_1}=\cos\theta^2,\ \frac{\partial\widetilde{\xi}^2}{\partial x_2}=d\xi^2\frac{\partial\xi^2}{\partial x_2}=\sin\theta^2$$

$$\widetilde{J}=\frac{J}{d\xi^1d\xi^2}$$

$$\theta^{21}=\theta^2-\theta^1$$

なお，式(23)，(24)の導出方法は示されていない。

本型式が提案された理由としては，a の型式では各変数の評価位置と座標の曲がりによっては解析が困難になる場合があり，b および c の型式では運動方程式の各項のもつ意味がわかり難く，境界条件を明瞭に与えがたいためとされている（渡邊ら，2002）。しかしながら，b および c の型式と同様に，このような型式では a の型式と比較して項数が非常に多くなってプログラムの作成が煩雑になる上，追加される項の存在によって保存性を保つことが困難になる。

流体力学の数値シミュレーションの分野では，このように一般座標反変物理成分を基本変数とする型式は，a の型式と比較すると少ないものの，適用事例がみられる。しかしその場合の基礎方程式は，デカルト座標系の基礎方程式において空間偏微分を共変微分に置き換えることのみによって得られている（越塚，1997）。そしてその式は式(23)，(24)のような複雑な構成ではない。なお，共変微分の詳細については本報告の範疇を越えるので，専門書（越塚，1997）を参照されたい。

本型式における変数の配置については，明示されていない。

e　農業水利の分野において比較的容易に普及しうると考えられる基礎方程式の型式と変数の配置方法

以上の4つの基礎方程式の型式について比較したのが **Table 1** である。項数の少なさ，計算の単純さ，運動量の保存性を保つことの容易さから，ここでは，一般座標系における平面2次元流れの基礎方程式としては基本変数にデカルト座標物理成分，対流速度に一般座標反変成分を用いる型式，変数の配置方法としてはコロケート配置とするⅡ 2 a の方法を採用することを提案する。流れの基礎方程式を式(25)，(26)に，変数の配置方法を **Fig. 8** に再掲する。

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{1}{J}\frac{\partial JQ^j}{\partial\xi^j}=0\qquad(25)$$

Table 1　一般座標系における基礎方程式の型式の比較

Comparison of form of fundamental equation in generalized curvilinear coordinate system

方法（説明した箇所）	基本変数	対流速度	項数	計算の単純さ	運動量の保存性を保つことの容易さ	変数の配置方法
Ⅱ 2 a	デカルト座標物理成分	一般座標反変成分	最も少ない	最も単純	容易	コロケート配置
Ⅱ 2 b	一般座標反変成分（単位幅流量を利用する）	一般座標反変成分	最も多い	Ⅱ 2 dほどではないが，Ⅱ 2 aよりかなり複雑	困難	変則的なスタガード配置
Ⅱ 2 c	一般座標反変成分（単位幅流量を利用しない）	一般座標反変成分	最も多い	Ⅱ 2 dほどではないが，Ⅱ 2 aよりかなり複雑	困難	不明（格子中心に全てを配置している可能性が高い）
Ⅱ 2 d	一般座標反変物理成分（単位幅流量を利用しない）	一般座標反変物理成分	Ⅱ 2 b，Ⅱ 2 cほどではないが，Ⅱ 2 aよりかなり多い	最も複雑	困難	不明

$$\frac{\partial M_i}{\partial t}+\frac{1}{J}\frac{\partial\left(JU^jM_i\right)}{\partial\xi^j}=$$
$$-gh\frac{\partial\xi^j}{\partial x_i}\frac{\partial(z+h)}{\partial\xi^j}-\frac{\tau_{bi}}{\rho} \tag{26}$$
$$+\frac{\partial\xi^k}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial\xi^k}\left\{v_t\left(\frac{\partial\xi^l}{\partial x_j}\frac{\partial M_i}{\partial\xi^l}+\frac{\partial\xi^m}{\partial x_i}\frac{\partial M_j}{\partial\xi^m}\right)\right\}$$

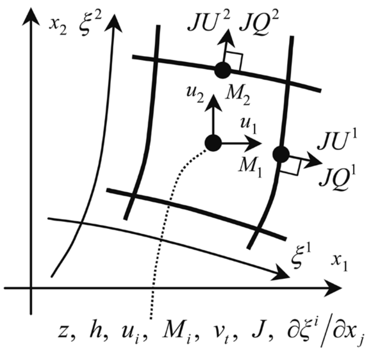


Fig.8 一般座標系における変数のコロケート配置

Collocated arrangement of variables in generalized curvilinear coordinate system

3 計算方法

a 基礎方程式の離散化の方法

数値シミュレーションは，基礎方程式を離散化し，それを代数計算することによって実施される。離散化の方法には有限差分法，有限体積法，有限要素法がある。有限差分法とは，格子点上に変数を配置し，基礎方程式における変数の勾配を差分商によって近似するものである。有限体積法とは，格子点上ではなく，格子点によって囲まれたコントロールボリューム(以下，CV とする)の内部に CV 内の値を代表する変数を配置するとともに，CV 間の界面にはフラックスを配置し，保存則を CV 間の界面における流入流出と CV の内部での発生消滅によって表現するものである。なお，変数をコロケート配置する場合，CV 内の変数はその中心に配置される。有限要素法とは，節点に変数を配置し，節点によって囲まれた要素の内部では節点における値から内挿した分布を与えるものである。2 次元の場合，有限差分法では 4 角形からなる構造格子，有限要素法では 3 角形からなる非構造格子を用いることになり，有限体積法では両方の格子を扱うことができる。なお，近年では有限差分法においても有限体積法の考え方が取り入れられており(梶島, 1999)，これら 2 つの方法の違いは小さくなっている。

一般に，河川や水路を対象として平面 2 次元流れの数値シミュレーションを行う場合，有限差分法が適用されることが多い。よってここでも，基礎方程式の離散化方法として有限差分法を採用し，以降の検討を続ける。但し，有限体積法の考え方が取り入れられた有限差分法によるものとし，格子点によって囲まれた区間についても以降は格子ではなく CV と呼ぶこととする。

b 空間微分項の差分計算

運動方程式 (式 (26)) の対流項は非線形項であるため，その他の空間微分項と比較して不安定になりやすく，差

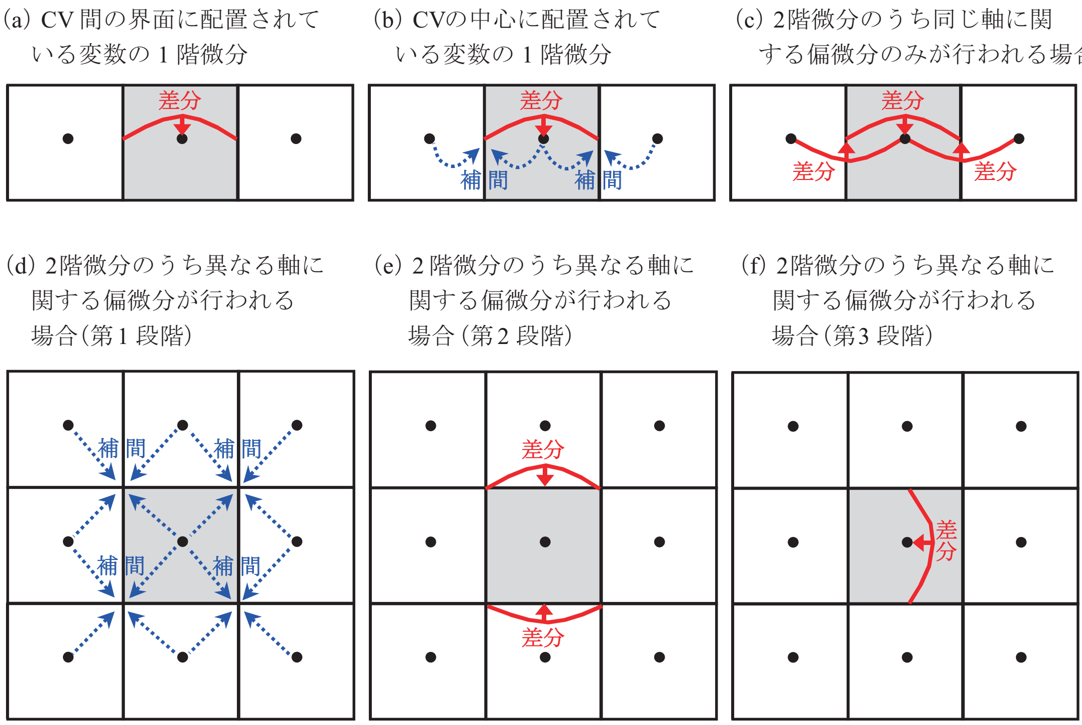


Fig.9 対流項の他の空間微分項に対する差分の概念図

Conceptual diagram of finite difference of space derivative term except convective term

分計算の際には特別な処理がなされることが多い。

（1）　対流項の他の空間微分項

時間発展の計算の対象である h，M_i はともに CV の中心に配置されるため，CV の中心で空間微分項の差分計算を行うことになる。1 階微分の場合は，CV 間の界面に配置されている変数（JU^i，JQ^i）についてはその値を用いて（**Fig. 9**（a）），CV の中心に配置されている変数（M_i, z, h）については CV 間の界面で補間された値を用いて（**Fig. 9**（b）），差分計算を行う。補間する際には，隣り合う 2 つの CV の中心における値を平均する。2 階微分項のうち同じ軸に関する偏微分のみが行われる場合（$\partial^2/\partial\xi^1\partial\xi^1$，$\partial^2/\partial\xi^2\partial\xi^2$）は，まず，隣り合う 2 つの CV の中心に配置されている変数を差分計算することによって，それらの CV 間の界面における 1 階微分を求める（**Fig. 9**（c））。次に，向かい合う 2 つの界面における 1 階微分を差分計算することによって，CV の中心における 2 階微分を求める（**Fig. 9**（c））。2 階微分項のうち異なる軸に関する偏微分が行われる場合（$\partial^2/\partial\xi^1\partial\xi^2$，$\partial^2/\partial\xi^2\partial\xi^1$）は，まず，CV の角となる格子点における値を，周辺 4 つの CV の中心における値の平均によって補間する（**Fig. 9**（d））。次に，隣り合う 2 つの格子点における補間値を差分計算することによって，それらの格子点によって構成される CV 間の界面における 1 階微分を求める（**Fig. 9**（e））。最後に，向かい合う 2 つの界面の 1 階微分を差分計算することによって，CV 中心における 2 階微分を算出する（**Fig. 9**（f））。

（2）　対流項

運動方程式の対流項の差分計算では，隣り合う 2 つの CV の中心における値をそれらの CV 間の界面に補間する際（**Fig. 9**（b））に，平均を行う，すなわち二次精度中心差分（式（27），**Fig. 10**）を適用すると，現実には生じない振動が生じ，計算が発散することが多い。

$$(JUM)_{k+\frac{1}{2}} = JU_{k+\frac{1}{2}} \frac{M_{k+1}+M_k}{2} \tag{27}$$

このため，補間する際に，界面に対して上流側に 1 つの CV の中心における値を CV 間の界面に外挿する一次精度上流差分（式（28），**Fig. 10**）が適用されることがある。しかしこの方法では，振動は全く生じないものの，実際の空間的な変動が大きく平滑化されてしまう。

$$(JUM)_{k+\frac{1}{2}} = JU_{k+\frac{1}{2}} \frac{M_{k+1}+M_k}{2} - \left|JU_{k+\frac{1}{2}}\right| \frac{M_{k+1}-M_k}{2} \tag{28}$$

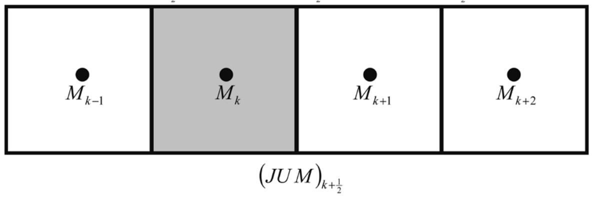


Fig.10　CV 間の界面における変数の補間の概念図

Conceptual diagram of interpolation of variables on face of control volume

その対策として，二次精度中心差分と一次精度上流差分の中間的な計算方法であるドナースキーム（式（29），**Fig.10**）も提案されている。

$$(JUM)_{k+\frac{1}{2}} = JU_{k+\frac{1}{2}} \frac{M_{k+1}+M_k}{2} - \alpha\left|JU_{k+\frac{1}{2}}\right| \frac{M_{k+1}-M_k}{2} \tag{29}$$

ここで，α は上流化に関する重み係数であり，$\alpha = 0.2 \sim 0.3$ とされることが多い。$\alpha = 1$ とすれば完全に上流化されて一次精度上流差分（式（28））となり，$\alpha = 0$ とすれば二次精度中心差分（式（27））となる。この方法では，一次精度上流差分と比較するとやや緩和されるものの，実際の空間的な変動が大きく平滑化されてしまう。

実際には，界面に対して上流側に 2 つと下流側に 1 つの CV の中心における値を用いて，2 次曲線をあてはめて補間する QUICK 法（式（30），**Fig.10**）が比較的多く使用されている。

$$\begin{aligned}(JUM)_{k+\frac{1}{2}} &= JU_{k+\frac{1}{2}} \frac{-M_{k+2}+9M_{k+1}+9M_k-M_{k-1}}{16} \\ &\quad -\left|JU_{k+\frac{1}{2}}\right| \frac{-M_{k+2}+3M_{k+1}-3M_k+M_{k-1}}{16}\end{aligned} \tag{30}$$

この方法では振動と空間変動の平滑化がともに生じるが，いずれも 2 次精度中心差分やドナースキームによるものと比べてかなり抑えられる。

さらに，より高精度な差分計算方法も提案されている。しかしながらそれらの手法では，計算に必要となる CV の範囲が QUICK 法よりも広がるとともに，計算も複雑になる。平面 2 次元流れと河床変動の数値シミュレーションでは計算の対象外となる陸域が時間空間的に変動する現象を扱うため，このようなシミュレーションに適用すれば計算がさらに煩雑になる。そこでここでは，対流項の差分計算方法として QUICK 法の採用を提案する。

c　時間微分項の差分計算

連続式（式（25））では，h が直接現れる空間微分項が存在しないため，オイラー陽解法で十分である。式（31）の時間発展方程式に対するオイラー陽解法を一般化して表せば，式（32）となる。

$$\frac{\partial y}{\partial t} = f(y) \tag{31}$$

$$y^{N+1} = y^N + \Delta t\, f(y^N) \tag{32}$$

ここで，Δt は計算時間刻み，y^N は計算時間ステップ N における y であることを意味する。

一方，運動方程式（式（26））では，M_i を含む空間微分項が存在するため，オイラー陽解法が適用されることは少なく，修正オイラー法（2 段ルンゲ・クッタ法とも呼ばれる）や 4 段ルンゲ・クッタ法等の単ステップ多段法，2 次アダムス・バシュホース法等の多ステップ法が適用されることが多い。式（31）に対する修正オイラー法，4 段ルンゲ・クッタ法，2 次アダムス・バシュホース法を

一般化して表せば，それぞれ式(33)，(34)，(35)となる。

$$\begin{cases} y^{*} = y^{N} + \dfrac{\Delta t}{2} f\left(y^{N}\right) \\ y^{N+1} = y^{N} + \Delta t\, f\left(y^{*}\right) \end{cases} \tag{33}$$

$$\begin{cases} y^{*1} = y^{N} + \dfrac{\Delta t}{2} f\left(y^{N}\right) \\ y^{*2} = y^{N} + \dfrac{\Delta t}{2} f\left(y^{*1}\right) \\ y^{*3} = y^{N} + \Delta t\, f\left(y^{*2}\right) \\ y^{N+1} = y^{N} + \Delta t \left\{ \dfrac{f\left(y^{N}\right) + 2f\left(y^{*1}\right) + 2f\left(y^{*2}\right) + f\left(y^{*3}\right)}{6} \right\} \end{cases} \tag{34}$$

$$y^{N+1} = y^{N} + \Delta t \left\{ \frac{3}{2} f\left(y^{N}\right) - \frac{1}{2} f\left(y^{N-1}\right) \right\} \tag{35}$$

但し，多ステップ法は，今の計算時間ステップでは水域であるが，前の計算時間ステップでは計算対象外となる陸域であった CV に対しては，y^{N-1} が存在しないため適用できず，オイラー陽解法もしくは単ステップ多段法で代替せざるを得ないため，平面 2 次元流れと河床変動の数値シミュレーションには適していない。

また，デカルト座標系の場合はオイラー陰解法やクランク・ニコルソン法等の陰解法が適用されることもあるが，一般座標系の場合は計算が非常に複雑になるため適用されることは殆どない。式(31)に対するオイラー陰解法，クランク・ニコルソン法を一般化して表せば，それぞれ式(36)，(37)となる。

$$y^{N+1} = y^{N} + \Delta t\, f\left(y^{N+1}\right) \tag{36}$$

$$y^{N+1} = y^{N} + \Delta t \left\{ \frac{1}{2} f\left(y^{N+1}\right) + \frac{1}{2} f\left(y^{N}\right) \right\} \tag{37}$$

以上より，単ステップ多段法を適用するのがよいと考えられる。このうち修正オイラー法と 4 段ルンゲ・クッタ法のいずれが適しているかについては，オイラー陽解法との比較も含めて，Ⅳ章で検証を行う。

d　計算の順序

変数をスタガード配置する場合(**Fig. 1**)は，計算の順序が問題になることは殆どない。しかしながら変数をコロケート配置する場合(**Fig. 8**)は，運動方程式(式(26))に基づく M_i の時間発展において，水面勾配項を付加するタイミングが重要となる。これは，スタガード配置では，隣り合う 2 つの CV の中心における水位から算出した水面勾配をそれらの CV 間の界面における M_i に作用させることができるのに対し(**Fig. 11**(a))，コロケート配置では，前述 b のように水面勾配を計算したとしても(**Fig. 9**(b))，結果的には一つおきに 2 つの CV の中心における水位から算出した水面勾配をそれらの CV 間にある CV の中心における M_i に作用させることになる(**Fig. 11**(b))，すなわち，M_i と同じ位置の水位が M_i に作用する水面勾配において使用されないことになる。このような場合，現実には生じない振動が h に生じやすくなる。

一般的に考えられる 2 つの計算順序を **Fig. 12** に示す。左側はデカルト座標系と同様の順序である。以降では，この方法を通常法と呼ぶ。一方，右側では運動方程式を 2 段階に分けて計算しており，計算量が増えている。しかしながら，このような順序で計算を行えば，式(38)のように，隣り合う 2 つの CV の中心同士から計算された水面勾配をそれらの CV 間の界面における JQ^i に付加させることができる。これにより，前述した h における振動の発生を緩和できる。

$$JQ^{i\,N+1} = JQ^{i\,*} - \Delta t g h^{N} J \overline{\frac{\partial \xi^i}{\partial x_l}\frac{\partial \xi^j}{\partial x_l}}^{i} \frac{\partial\left(z + h^{N}\right)}{\partial \xi^j} \tag{38}$$

ここで，Δt は計算時間刻み，$\overline{}^{i}$ は ξ^i 軸方向の補間であり，h^N は計算時間ステップ N における h，$JQ^{i\,N+1}$ は計算時間ステップ N+1 における JQ^i であることを意味する。一般座標系における流体力学の数値シミュレーションにおいても，圧力に振動が生じることを防ぐために **Fig.12** の右側と同様の順序で計算する方法があり，部分段階法(fractional step method)と呼ばれている。以降では，本図の右側の計算順序に対しても部分段階法と呼ぶ。部分段階法とすることの有効性については，Ⅳ章において通常法による結果と比較を行って検証する。

なお，前述 c で述べた時間微分項の計算方法である単ステップ多段法は，通常法の場合は **Fig.12** のうち「M_i の更新」において適用されるが，部分段階法の場合は「M* の計算」において適用される。このため，部分段階法では水面勾配項には単ステップ多段法は適用されないことになる。

e　水際境界における処理方法

河川における洪水時の流量変化に伴う水域の拡大および縮小等を表現するためには，水際境界の変動を適切

(a) 変数をスタガード配置する場合　　　(b) 変数をコロケート配置する場合

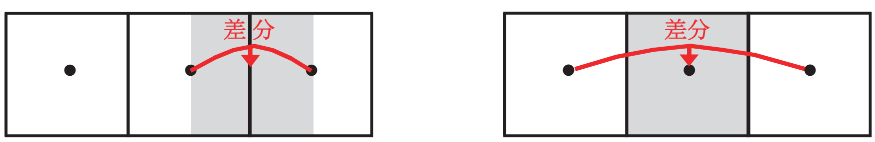


Fig. 11　水面勾配項の差分の概念図

Conceptual diagram of finite difference of water surface gradient term

に扱う必要がある。そのための方法は，これまでに多くの研究で提案されている（長田，1999；中川，1999；重枝・秋山，2003；前野・小川，2003；川崎ら，2004；内田・河原，2006a；内田・河原，2006b，重枝ら，2007）。しかし，これらの事例と本報告では基礎方程式の型式，変数の配置方法，離散化の方法等が異なることから，事例の方法のうちいずれかをそのまま適用することは不可能である。そこで，これらの方法でほぼ共通する基本的な考え方を参考にして，以下のように処理することを提案する。

①水深が h_{min} を下回るCVを陸域，h_{min} を上回るCVを水域とみなし，陸域CVでは流速 u_i および単位幅流量 M_i をゼロとする。

②陸域CVでは，通常法の場合は運動方程式の解をゼロとする。部分段階法の場合は水面勾配項を除いた運動方程式の解をゼロとするとともに，M_i を更新する際にもゼロのままとする。

③水域CVでは，通常法の場合は運動方程式を解く際，部分段階法の場合は M_i を更新する際，水面勾配項の計算方法を条件に応じて変化させる。ξ^i 軸方向にCVのL，C，Rがこの順で並んでおり，CV-Cが計算の対象のCVであるとし，ξ^i 軸方向の水面勾配項について考える場合は，以下のように条件分けする。

(i) CV-Rのみが陸域であり，かつその地盤高がCV-Cの水位より高い場合（**Fig.13**(a)）は，CV-CとLの間から計算する。

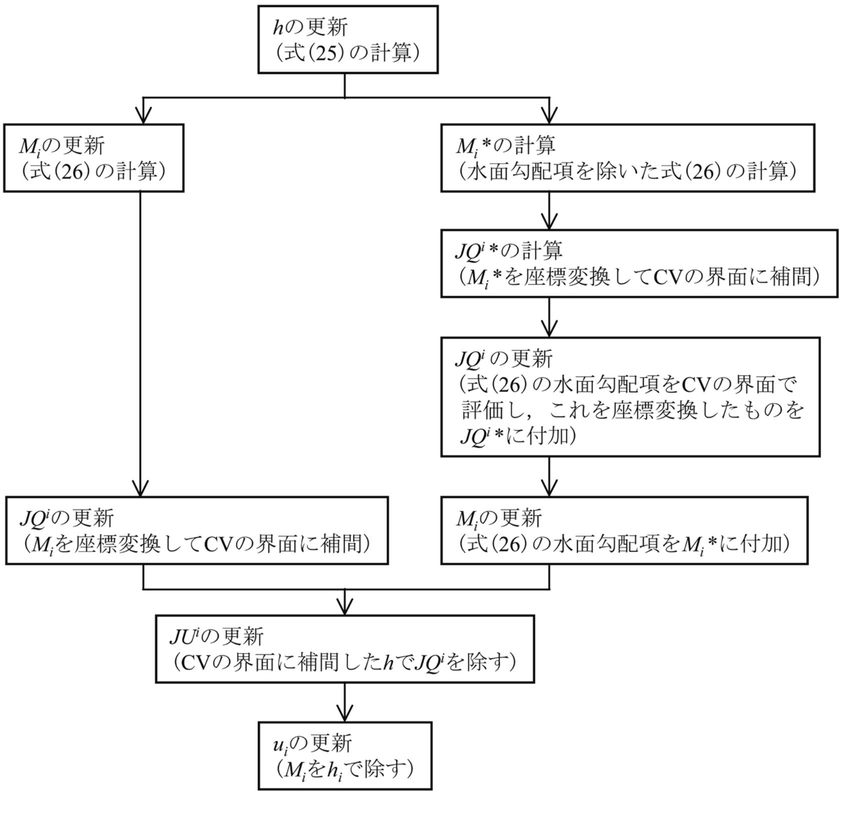


Fig. 12　計算順序

Calculation procedure

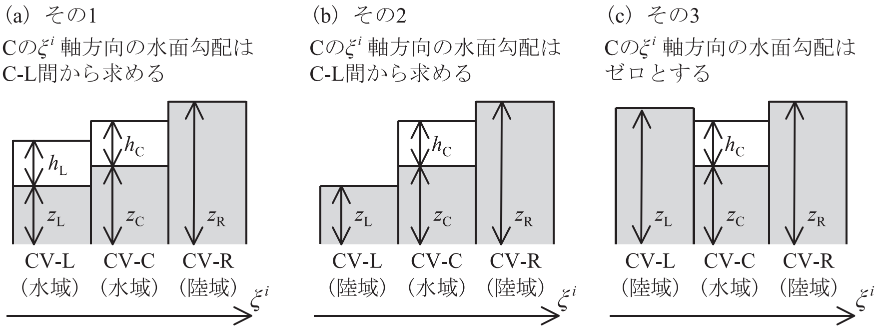


Fig. 13　水際境界における運動方程式の水面勾配項の計算方法

Calculation method of water level gradient term in equation of motion on boundary between water area and land area （ii） CV-L のみが陸域であり，かつその地盤高が CV-C の水位より高い場合（（i）の逆の場合）は，CV-C と R の間から計算する。

（iii） CV-R および L が陸域であり，かつ CV-R の地盤高のみが CV-C の水位より高い場合（**Fig.13**（b））は，CV-C と L の間から計算する。

（iv） CV-R および L が陸域であり，かつ CV-L の地盤高のみが CV-C の水位より高い場合（（iii）の逆の場合）は，CV-C と R の間から計算する。

（v） CV-R および L が陸域であり，かつそれらの地盤高が CV-C の水位より高い場合（**Fig.13**（c））は，ゼロとする。

（vi） 上記(i)〜(v)の他の場合は，前述 **b** の通り CV-L, C, R の間で計算する。

④部分段階法の場合に JQ^i を更新する際，CV 間の界面で評価した水面勾配項を座標変換したものとして，水域 CV 間では前述 **d** の式（38）の通り計算する。水域陸域 CV 間のうち陸域 CV の地盤高が水域 CV の水位より低い場合も，式（38）の通りとする。水域陸域 CV 間のうち陸域 CV の地盤高が水域 CV の水位より高い場合は，ゼロとする。陸域 CV 間でもゼロとする。

この方法の基本な考え方は，水深がある閾値を下回る CV を陸域として運動方程式の計算の対象外とすることと，ある CV を対象に水面勾配項を計算する際，陸域となり，かつその地盤高が当該 CV の水位よりも高い CV の値を用いないことである。これにより，陸域 CV 間では水の移動が生じず，水域陸域 CV 間では，水域から陸域への水の移動は生じるが，陸域から水域への水の移動は生じないことになる。この方法の妥当性については，Ⅳ章で検証する。

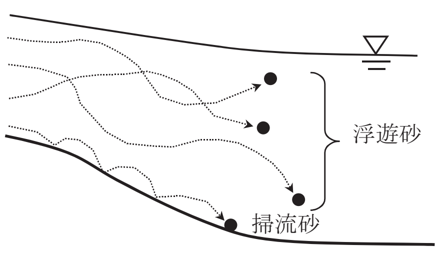


Fig.14　掃流砂と浮遊砂の概念図
Conceptual diagram of bed load and suspended load

Ⅲ　河床変動に関する手法の比較と提案

1　掃流砂量式（西本ら，1992；土木学会，1999；細川，2002；関根，2005）

a　砂礫の輸送形態

河床変動とは，河床材料のうち主に粒径が 0.1 〜 0.2mm 程度より大きな砂礫が流れによって輸送されることで生じるものである。このような砂礫の輸送は，一般に，河床面近傍において滑動および跳躍を繰り返す形態である掃流砂と，水の乱れの影響を顕著に受け，河床面付近から水面までの広範囲にわたって浮遊する形態である浮遊砂に大別される（**Fig.14**）。但し，この分類はあくまでも概念的なものであり，実際には両者を明確に分離できるものではない。また，同じ粒径の砂礫であっても，流れの状況によっては掃流砂と判断される輸送形態になる場合もあれば，浮遊砂とみなされる動きをする場合もあり，粒径の大きい砂礫ほど掃流砂になりやすく，粒径が小さいほど浮遊砂になりやすい。

実際の河床変動現象の中では掃流砂と浮遊砂が混在しているが，河床変動の数値シミュレーションでは対象とする現象において支配的となる形態のみを扱う場合が多い。頭首工周辺の河床変動現象において支配的となるのは掃流砂であることが多いため，ここで提案する一般座標系における平面 2 次元河床変動の数値シミュレーションにおいても掃流砂を対象とする。浮遊砂については今後の課題とする。

なお，粒径が 0.1 〜 0.2mm 程度より小さな微細砂やシルトの輸送形態は，ウォッシュロード（wash load）と呼ばれる。河床変動に大きな影響を及ぼすことは少ないが，水の密度の増加という二次的な意味で影響するといわれている。

b　流線方向の掃流砂量式

（1）　掃流砂量式

掃流砂の定量的な評価として，掃流砂量式がある。縦断方向すなわち流線方向についてのものは数多く提案されており，それらの中で河床変動の数値シミュレーションにおいて適用実績が比較的多いのは，芦田・道上の式（式（39））とマーヤー－ピーター・ミューラー（Meyer - Peter・Muller）の式（式（40），以下では MPM 式とする）である。

$$q_{Bs} = 17\tau_*^{\frac{3}{2}}\left(1-\frac{\tau_{*c}}{\tau_*}\right)\left(1-\sqrt{\frac{\tau_{*c}}{\tau_*}}\right)\sqrt{(\sigma/\rho-1)gd^3} \qquad (39)$$

$$q_{Bs} = 8(\tau_* - \tau_{*c})^{\frac{3}{2}}\sqrt{(\sigma/\rho-1)gd^3} \qquad (40)$$

ここで，q_{Bs} は流線方向の掃流砂量で，その単位は単位幅・単位時間あたりの移動体積（$m^3/s/m$）である。ρ は水の密度（$\rho = 1.00 \times 10^3 kg/m^3$），$\sigma$ は河床材料の密度（$\sigma = 2.65 \times 10^3 kg/m^3$），$d$ は河床材料の粒径，g は重力加速度（$g = 9.8 m/s^2$），τ_* は無次元掃流力，τ_{*c} は無次元限界掃流力である。

芦田・道上の式と MPM 式による結果の違いについては，Ⅳ章で確認する。

（2）　無次元掃流力

式（39）および（40）における無次元掃流力 τ_* は次式から得られる。

$$\tau_* = \frac{{u_*}^2}{(\sigma/\rho-1)gd} \qquad (41)$$

ここで，u_*は摩擦速度であり，次式により算出される。

$$u_* = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}} \tag{42}$$

τは掃流力であり，次式により算出される。

$$\tau = \rho g R I_e \tag{43}$$

式(43)においてRは径深であり，幅の広い流れの場合は水深とされる。また，I_eはエネルギー勾配であり，Manning則から得られる。これらに基づき，さらに流線方向の流速をu_sとすると，τの算出式は次のようになる。

$$\tau = \frac{\rho g {n_b}^2 u_s |u_s|}{h^{1/3}} \tag{44}$$

この式を2次元に拡張すると，次のようになる。

$$\tau_{bi} = \frac{\rho g {n_b}^2 u_i \sqrt{u_j u_j}}{h^{1/3}} \tag{45}$$

ここで，u_iはx_i軸方向(i = 1, 2)の流速成分，$u_s = \sqrt{u_j u_j}$である。また，τ_{bi}はτのx_i軸方向成分，n_bは底面についてのManningの粗度係数である。なお，式(45)は式(5)の底面摩擦応力と同一であり，式(45)を式(42)に代入すれば式(7)が得られる。

(3)　Manningの粗度係数と抵抗係数

式(45)におけるManningの粗度係数n_bについては，水路壁の素材や状態，河床材料毎に，およその値の範囲が詳しく整理されている(Ven著・石原訳，1962)。河床変動の数値シミュレーションでは，河床材料の粒径dによる関数としての計算式(式(46))を用いてその値を求めることがある(例えば，崇田・清水，1994)。

$$n_b = 0.146 \frac{d^{1/6}}{\sqrt{g}} \tag{46}$$

一方で，n_bは単位として s/m$^{1/3}$を有するため，同一の水路壁において水理条件に関わらずn_bを一定とすることができない場合もあることから，n_bを含む抵抗係数C_f

$$C_f = \frac{g {n_b}^2}{h^{1/3}} \tag{47}$$

に対して，次式のような対数型抵抗則が用いられることもある(例えば，西本ら，1992)。

$$C_f = \left\{ \frac{1}{6.0 + 2.5 \ln(h/k_s)} \right\}^2 \tag{48}$$

ここで，k_sは相当粗度であり，河床材料の平均粒径dの2～3倍(吉川，1985)といわれていることから，k_s = 2.5dとされることが多い。ここでも式(48)を用いる場合にはk_sとしてこの値を採用する。

式(45)を計算する際に式(46)を用いる場合と式(47)および(48)を用いる場合との結果の違いについては，Ⅳ章で確認する。

(4)　無次元限界掃流力

式(39)および(40)における無次元限界掃流力τ_{*c}は次式から得られる。

$$\tau_{*c} = \frac{{u_{*c}}^2}{(\sigma/\rho - 1) g d} \tag{49}$$

ここで，u_{*c}は限界摩擦速度であり，岩垣公式(式(50))から得られる。

$${u_{*c}}^2 = \begin{cases} 0.05(\sigma/\rho - 1) g d & (671 \le R_*) \\ \{0.01505(\sigma/\rho - 1) g\}^{\frac{25}{22}} \nu^{-\frac{3}{11}} d^{\frac{31}{22}} & (162.7 \le R_* \le 671) \\ 0.034(\sigma/\rho - 1) g d & (54.2 \le R_* \le 162.7) \\ \{0.1235(\sigma/\rho - 1) g\}^{\frac{25}{22}} \nu^{\frac{7}{16}} d^{\frac{11}{32}} & (2.14 \le R_* \le 54.2) \\ 0.14(\sigma/\rho - 1) g d & (R_* \le 2.14) \end{cases} \tag{50}$$

νは水の動粘性係数(水温20℃のときν = 1.0 × 10^{-6} m^2/s)であり，R_*は次式により算出される。

$$R_* = \{(\sigma/\rho - 1) g\}^{\frac{1}{2}} d^{\frac{3}{2}} \nu^{-1} \tag{51}$$

c　流線と直交する方向の掃流砂量式

流線と直交する方向について河床に勾配がある場合や，流線が湾曲している場合には，砂礫が輸送される方向は流線と直交する方向の成分をもつようになり，この方向の掃流砂量を見積もる必要が生じる。このような掃流砂量式は少なく，河床変動の数値シミュレーションに関する既往の研究では，長谷川の式(式(52))が適用されている事例が大半である。

$$q_{Bn} = q_{Bs} \left(\frac{u_{Bn}}{u_{Bs}} - \sqrt{\frac{1}{\mu_s \mu_k}} \sqrt{\frac{\tau_{*c}}{\tau_*}} \frac{\partial z}{\partial n} \right) \tag{52}$$

ここで，q_{Bn}は流線と直交する方向の掃流砂量で，その単位はq_{Bs}と同じである。μ_s，μ_kはそれぞれ河床材料の静止および動摩擦係数(μ_s = 1.00，μ_k = 0.45)，sは流線方向の座標軸，nは流線と直交する方向の座標軸，u_{Bs}，u_{Bn}はそれぞれ河床における流速のs，n軸方向成分である。

長谷川の式におけるu_{Bn}/u_{Bs}は次のようにモデル化されている。

$$\frac{u_{Bn}}{u_{Bs}} = -N_* \frac{h}{R_s} \tag{53}$$

R_sは流線の曲率半径である。N_*は係数であり，Engelund (1974)に倣って7.0とする事例が多いが(例えば，Shimizu and Itakura, 1991；西本ら, 1992；長田ら, 1997；Chang and Shimizu, 2005)，11.5とする事例もみられる(例えば，長田ら, 1996)。両値による結果の違いについては，Ⅳ章で確認する。

長谷川の式における$\partial z/\partial n$は式(54)から求められる。

$$\frac{\partial z}{\partial n} = \frac{\partial z}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial n} = \frac{\partial z}{\partial \xi^j} \frac{\partial \xi^j}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial n} \tag{54}$$

ここで，$\partial x_1/\partial n$，$\partial x_2/\partial n$ は次の通りである。

$$\frac{\partial x_1}{\partial s}=\frac{u_1}{\sqrt{{u_1}^2+{u_2}^2}}\quad,\quad\frac{\partial x_2}{\partial s}=\frac{u_2}{\sqrt{{u_1}^2+{u_2}^2}} \tag{55}$$

式(53)における $1/R_s$ については，まず **Fig.15** より式(56)の関係が成立する。

$$R_s\,\Delta\theta\approx\Delta s \tag{56}$$

この式から，次のような関係が得られる。

$$\frac{1}{R_s}=\frac{\Delta\theta}{\Delta s}\approx\frac{\partial\theta}{\partial s}=\frac{\partial}{\partial T}\left\{\tan^{-1}\left(\frac{u_n}{u_s}\right)\right\}=\frac{1}{1+\left(\frac{u_n}{u_s}\right)^2}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{u_n}{u_s}\right)$$

$$=\frac{1}{1+\left(\frac{u_n}{u_s}\right)^2}\frac{\partial x_j}{\partial s}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{u_n}{u_s}\right)=\frac{1}{1+\left(\frac{u_n}{u_s}\right)^2}\frac{\partial x_j}{\partial s}\frac{\partial\xi^k}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial\xi^k}\left(\frac{u_n}{u_s}\right) \tag{57}$$

ここで，$\partial x_1/\partial s$，$\partial x_2/\partial s$ は次の通りである。

$$\frac{\partial x_1}{\partial s}=\frac{u_1}{\sqrt{{u_1}^2+{u_2}^2}}\quad,\quad\frac{\partial x_2}{\partial s}=\frac{u_2}{\sqrt{{u_1}^2+{u_2}^2}} \tag{58}$$

また，u_s，u_n はそれぞれ流速の s，$\overline{n}$ 軸方向成分である。

式(57)の右辺において，$u_s=\sqrt{u_j u_j}$ であるが，u_n は未知数である。u_s，u_n を u_1，u_2 に置き換えて計算している事例が多いが，流線が湾曲していても u_2 が 0 であれば $1/R_s$ が 0 となる，u_1 が 0 となるときに $1/R_s$ を計算できない等の問題が生じる。このためここでは，R_s として CV の座標情報から得られる流路の曲率半径を適用することを提案する。但し，このように扱うと CV 分割の方法がシミュレーション領域全体における流れと河床変動に影響を及ぼす可能性がある。その確認は今後の課題である。

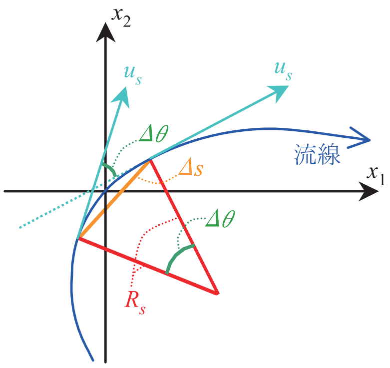


Fig.15　流線の曲率半径の定義
Definition of radius of curvature of stream line

2　掃流砂の連続式（土木学会, 1999；細川, 2002；関根, 2005）

河床変動量は掃流砂の連続式を用いて計算される。掃流砂の連続式はデカルト座標系では式(59)，一般座標系では式(60)のように表記される。

$$\frac{\partial z}{\partial t}=-\frac{1}{1-\lambda}\frac{\partial q_{Bx_i}}{\partial x_i} \tag{59}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t}=-\frac{1}{1-\lambda}\frac{1}{J}\frac{\partial Jq_{B\xi^i}}{\partial\xi^i} \tag{60}$$

ここで，λ は河床材料の間隙率(λ = 0.40)である。q_{Bx_i} は x_i 軸方向の掃流砂量，$q_{B\xi^i}$ は ξ^i 軸方向の掃流砂量であり，それぞれ次のように得られる。

$$q_{Bx_i}=\frac{\partial x_i}{\partial s}q_{Bs}+\frac{\partial x_i}{\partial n}q_{Bn} \tag{61}$$

$$q_{B\xi^i}=\frac{\partial\xi^i}{\partial x_j}q_{Bx_j} \tag{62}$$

これらの式中の q_{Bs}，q_{Bn}，座標変換の係数については，いずれも既出の通りである。

3　計算方法

一般座標系における河床変動の数値シミュレーションにおける変数の配置方法としては，明示された事例は殆どないが，平面 2 次元流れの数値シミュレーションにおいてコロケート配置するのであれば，これに倣うのがよいと考えられる。すなわち，$Jq_{B\xi^i}$ は JU^i および JQ^i と同様に CV 間の界面に，その他については CV の中心に配置するのである。このときの $Jq_{B\xi^i}$ は，次のようにして求める。まず, CV の中心で式(62)によって $q_{B\xi^i}$ を求め，この位置で J を乗じる。次に，隣り合う 2 つの CV の中心における $Jq_{B\xi^i}$ をそれらの CV 間の界面で補間する。

基礎方程式の離散化の方法としては，平面 2 次元流れの数値シミュレーションにおいて有限差分法を採用しているので，河床変動の数値シミュレーションにおいても同様とする。時間微分項の差分計算としては，掃流砂の連続式(式(60))ではを含む空間微分項が存在しないため，オイラー陽解法(式(32))で十分である。空間微分項は，時間発展の計算対象である z は CV の中心に配置されるため，CV 間の界面に配置されている $Jq_{B\xi^i}$ を差分計算することによって，CV の中心で求める。

ここで，$Jq_{B\xi^i}$ を CV 間の界面で補間する際には，通常，その界面の両側の 2 つの CV の中心における値を平均することによって行われる。しかしながらこのように行うと，平面 2 次元流れの運動方程式における対流項の差分計算と同様，流れの状況によっては現実には生じない振動が z に生じる場合がある。そこで，$Jq_{B\xi^i}$ の CV 間の界面への補間方法として，ドナースキーム(式(29))に倣い，**Fig.16** および式(63)，(64)のように行うことを提案する。

$$\left(Jq_{B\xi}\right)_{k+\frac{1}{2}}=\frac{\left(Jq_{B\xi}\right)_{k+1}+\left(Jq_{B\xi}\right)_k}{2}-\alpha\,\mathrm{sgn}\,\frac{\left(Jq_{B\xi}\right)_{k+1}-\left(Jq_{B\xi}\right)_k}{2} \tag{63}$$

$$\mathrm{sgn} = \begin{cases} +1 & ;\left(Jq_{B\xi}\right)_{k+1} + \left(Jq_{B\xi}\right)_k > 0 \\ -1 & ;\left(Jq_{B\xi}\right)_{k+1} + \left(Jq_{B\xi}\right)_k < 0 \end{cases} \tag{64}$$

なお，ドナースキームでは α = 0.2 ～ 0.3 とされる。ここでは 0.2 を採用する。

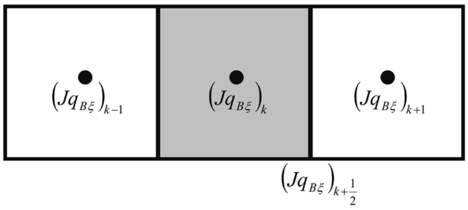


Fig.16　CV 間の界面における変数の補間の概念図
Conceptual diagram of interpolation of variables on face of control volume

4　現場に適用する際の留意事項

芦田・道上の式および MPM 式を含む殆ど全ての掃流砂量式は直線形の 1 次元的な水路における実験から得られたデータをもとに構築されており，さらにその多くは平衡状態を対象としたものである。このため，河川等の現場を対象とした河床変動の数値シミュレーションに適用する際には，現地で流砂量の観測を行い，その結果に適合するよう流砂量式を修正して用いることが必要な場合もある（福岡，2005）。

また，現場の河床材料の粒度分布によっては，河床材料を平均粒径の砂礫で代表させることができない場合もある。このような場合は，シミュレーション領域内に存在する全ての粒径の砂礫をある粒径幅で複数の階層（i=1, …, I）に分割するとともに，各 CV において階層 i の砂礫が河床材料全体に占める割合 F_i を求め，階層毎にⅢ 1 ～ 3 を実施することになる。各 CV の F_i もシミュレーションの中で変化するので，河床形状の変動だけでなく，各地点における粒度分布の変動も計算される。このような混合粒径としての扱いの導入は，今後の課題である。

Ⅳ　提案する手法の検証

1　検証内容

河川を対象とした平面 2 次元流れの数値シミュレーションでは，堰や水制工等の構造物周辺における常流と射流が混在する流れや，堰の上下流等における水位の不連続部を有する流れ等を精度よく解析できることが必要である。そこでまず，本報告で提案した流れの数値シミュレーション手法のこれらの現象に対する妥当性の検証を，2 節では 1 次元ダムブレイク流れを対象として，3 節では 2 次元ダムブレイク流れを対象として行う。但し，これらの 2 つの流れはデカルト座標系であっても数値シミュレーションを実施しうるものであるため，続く 4 節では，一般座標系でなければ形状の表現が困難である河川を模擬した水路（模擬河川）における流れに対する適用性の検証を行う。最後に 5 節では，河床変動の数値シミュレーション手法の妥当性の検証を，蛇行水路における河床変動を対象として行う。検証対象の事項，各事項に対する提案内容，提案箇所，検証箇所を **Table 2** に示す。

2　1 次元ダムブレイク流れ

a　対象

流下方向に関する水深の初期条件および水路床の勾配としては，**Table 3** の 2 ケースを設定した。このうちケース 2 は，水際境界が変動する流れでもある。横断方向に関しては，シミュレーション領域全体の距離は 10m とし，水深や水路床高さは均一とした。

b　方法

理論値（本間・安芸，1962）との比較を行うため，1 次元ダムブレイク流れのシミュレーションでは，運動方程式としては式(26)において拡散項と底面摩擦項を省略した次式を用いることとした。

$$\frac{\partial M_i}{\partial t} + \frac{1}{J}\frac{\partial\left(JU^j M_i\right)}{\partial \xi^j} = -gh\frac{\partial \xi^j}{\partial x_i}\frac{\partial\left(z+h\right)}{\partial \xi^j} \tag{65}$$

この式を用いたとしても，全体的な計算方法（Ⅱ 3）に大きな違いは生じない。

CV の幅は流下方向 Δx_1 および横断方向 Δx_2 ともに 0.5m，計算時間刻み Δt は 0.005s とした。陸域と水域との閾値である $h_{\min}$（Ⅱ 3 e）は，同様に拡散項と底面摩擦項した運動方程式を用いて陸域を伴うダムブレイク流れのシミュレーションを行った事例（内田・河原，2006a）に倣って 1.0 × 10^{-6}m とした。時間微分項の差分計算方法（Ⅱ 3 c）および計算の順序（Ⅱ 3 d）については，**Table 4** の 6 タイプを設定し，結果の違いを比較することとした。

c　結果と考察

ケース 1 に対する計算開始から 10 秒後の中央縦断面における水面形の数値シミュレーション結果（以下，計算値という）を理論値と比較したものが **Fig.17** である。流下方向のクーラン数 C_{r1}（式(66)）は，いずれのタイプでも 0.1 を超えることはなかった。

$$C_{r1} = \frac{u_1}{\Delta x_1/\Delta t} \tag{66}$$

本図より，計算の順序として通常法を採用するタイプ 1 ～ 3 を適用した場合，現実には生じない h の振動が，負段波の領域では全体的に，正段波の領域では先端部のみに生じている。一方，計算の順序として部分段階法を採用するタイプ 4 ～ 6 を適用した場合，現実には生じない h の振動が，負段波の領域および正段波の領域ともに先端部のみで生じている。タイプ 1 ～ 3 間で負段波の領域の全体における振動を，タイプ 4 ～ 6 間で負段波の領域

の先端部の振動を，タイプ 1 ～ 6 間で正段波の領域の先端部の振動を，それぞれ比較すると，これらの振動にタイプの違いによる差は殆どみられない。これらの結果から，タイプ 4 ～ 6 の方がタイプ 1 ～ 3 よりも安定性が高いことが確認された。

ケース 2 に対する中央縦断面における水面形の計算値を理論値と比較したものが **Fig.18** である。ケース 1 に対するシミュレーション結果を踏まえ，本図ではタイプ 1 ～ 3 の計算値を比較検討の対象外として掲載していない。タイプ 4 ～ 6 を適用した場合の流下方向のクーラン数 C_{r1} は，いずれも 0.1 を超えることはなかった。本図より，タイプ 4 ～ 6 を適用した場合，現実には生じない h の振動が，負段波の領域の先端部のみに生じており，これらの振動にタイプの違いによる差は殆どみられない。一方，正段波の先端に着目すると，タイプ 4 を適用した場合のみ，形状が歪んでいる。

Table 2　検証内容

Contents of object to be verified

検証対象の事項	提案内容および比較検討が必要な場合はその内容	提案箇所	検証箇所
流れの基礎方程式の型式	基本変数にデカルト座標物理成分，対流速度に一般座標反変成分を用いる型式	Ⅱ 2 e	Ⅳ 1～3
変数の配置方法	コロケート配置	Ⅱ 2 e	Ⅳ 1～3
離散化の方法	有限差分法	Ⅱ 3 a	Ⅳ 1～3
運動方程式の対流項の差分計算方法	QUICK 法	Ⅱ 3 b	Ⅳ 1～3
運動方程式の時間微分項の差分計算方法	修正オイラー法，もしくは，4 段ルンゲクッタ法（オイラー陽解法も含めて 3 者の比較を行う）	Ⅱ 3 c	Ⅳ 1～3※
流れの計算の順序	部分段階法(通常法との比較を行う)	Ⅱ 3 d	Ⅳ 1～3※
水際境界における処理方法	水深がある閾値を下回る CV を陸域として運動方程式の計算の対象外とするとともに，ある CV を対象に水面勾配項を計算する際，陸域となり，かつその地盤高が当該CVの水位より高いCVの値を用いない	Ⅱ 3 e	Ⅳ 1～3
流線方向の掃流砂量式	芦田・道上の式，もしくは，MPM 式(比較を行う)	Ⅲ 1 b (1)	Ⅳ 4
底面摩擦応力の計算に用いる係数	河床材料の粒径による関数としての Manning の粗度係数，もしくは，河床の相当粗度および水深による関数としての抵抗係数(比較を行う)	Ⅲ 1 b (2)	Ⅳ 4
流線と直交する方向の掃流砂量式	長谷川の式	Ⅲ 1 c	Ⅳ 4
長谷川の式の計算に必要な係数 N_*	7.5，もしくは，11.5(比較を行う)	Ⅲ 1 c	Ⅳ 4
長谷川の式の計算に必要な流線の曲率半径	流路の曲率半径を適用する	Ⅲ 1 c	Ⅳ 4
掃流砂量の一般座標系反変成分を CV 間の界面に補間する方法	対流項の差分計算に適用されるドナースキームに倣って上流側に重みを置いた方法とし，その際の上流化に関する重み係数の値は 0.2 とする	Ⅲ 3	Ⅳ 4

※ Ⅳ 2～3 では比較検討を行わず，Ⅳ 1 で選定された結果の妥当性の確認のみを行う

Table 3　1 次元ダムブレイク流れに関する流下方向における水深の初期条件および水路床の勾配

Initial condition and bed gradient in flow direction of 1 dimensional dam break flow

（単位：m）

ケース	領域全体の距離	上流側(水深大)の水深	下流側(水深小)の水深	上流側(水深大)の距離	水路床の勾配
1	80	0.5	0.01（$> h_{min}$）	30	全て勾配ゼロ
2	80	0.5	h_{min}	30	全て勾配ゼロ

Table 4　1 次元ダムブレイク流れのシミュレーションに対する差分計算の方法および計算の順序
Difference calculation method and calculation procedure for simulation of 1 dimensional dam break flow

タイプ	時間微分項の差分計算方法	計算の順序
1	オイラー陽解法	通常法
2	修正オイラー法	通常法
3	4 段ルンゲ・クッタ法	通常法
4	オイラー陽解法	部分段階法
5	修正オイラー法	部分段階法
6	4 段ルンゲ・クッタ法	部分段階法

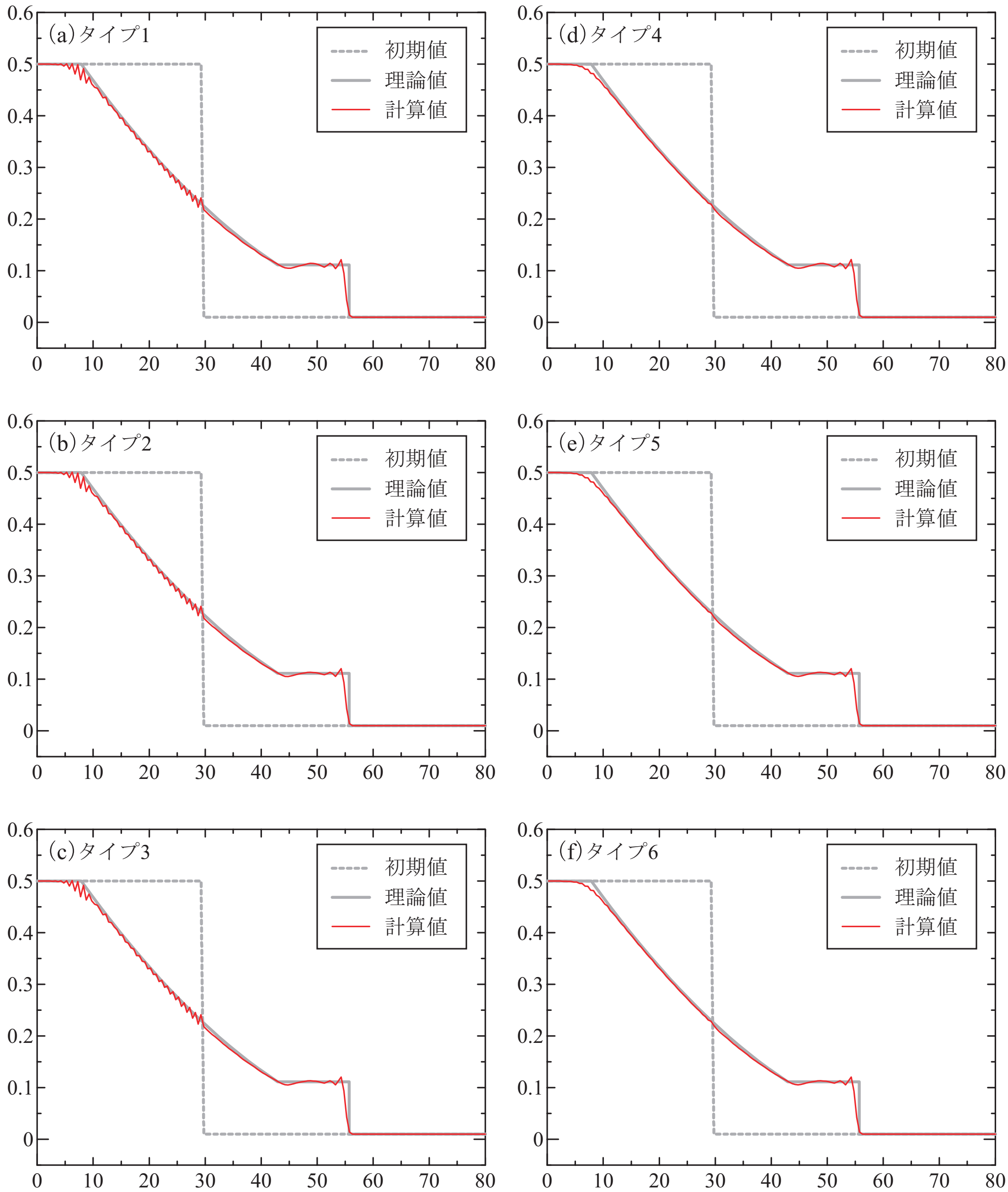


Fig. 17　1 次元ダムブレイク流れのケース 1 に対する理論値と計算値
（横軸：流下方向距離 x_1（m），横軸：水深 h（m））
Theoretical value and simulated value for case 1 of 1 dimensional dam break flow

以上の 1 次元ダムブレイク流れへの適用結果から，タイプ 5 および 6 が最も安定性と再現性が高いことが確認された。タイプ 4 も安定性は高いが，ケース 2 に適用した場合には正段波の先端部の再現性が低くなったため，水域の拡大のシミュレーションを行う場合等には精度面で問題になる可能性がある。ここで，タイプ 5 および 6 とでは，式(33)と式(34)の比較から明らかなように，計算量に約 2 倍の違いがある。運動方程式の他にも連続式，流砂量の計算，流砂の連続式の計算等があるため，単純な比較はできないが，長期間にわたるシミュレーションを行う場合等には，この差が問題になる可能性がある。従って，タイプ 1 ～ 6 の中ではタイプ 5 が最適と考えられ，Ⅱ章で採用した基礎方程式，変数の配置方法，計算方法等によって一般座標系における平面 2 次元流れのシミュレーションを実施する際には，時間微分項の差分計算方法として修正オイラー法，計算の順序として部分段階法を採用することを提案する。以降のシミュレーション手法の検討においても，これらを用いる。

また，この組み合わせによる数値シミュレーションでは，Ⅱ 3 e で提案した水際境界の変動の処理方法は，1 次元ダムブレイク流れに対しては問題がなかったことが確認された。

なお，タイプ 5 を適用した場合のシミュレーション領域における水の体積の変化を調べると，ケース 1，2 ともに，初期値に対する相対誤差は計算開始から 10 秒経過後まで常に 10^{-11}% 未満であった。このため，提案する手法は保存性も十分に高いと考えられる。

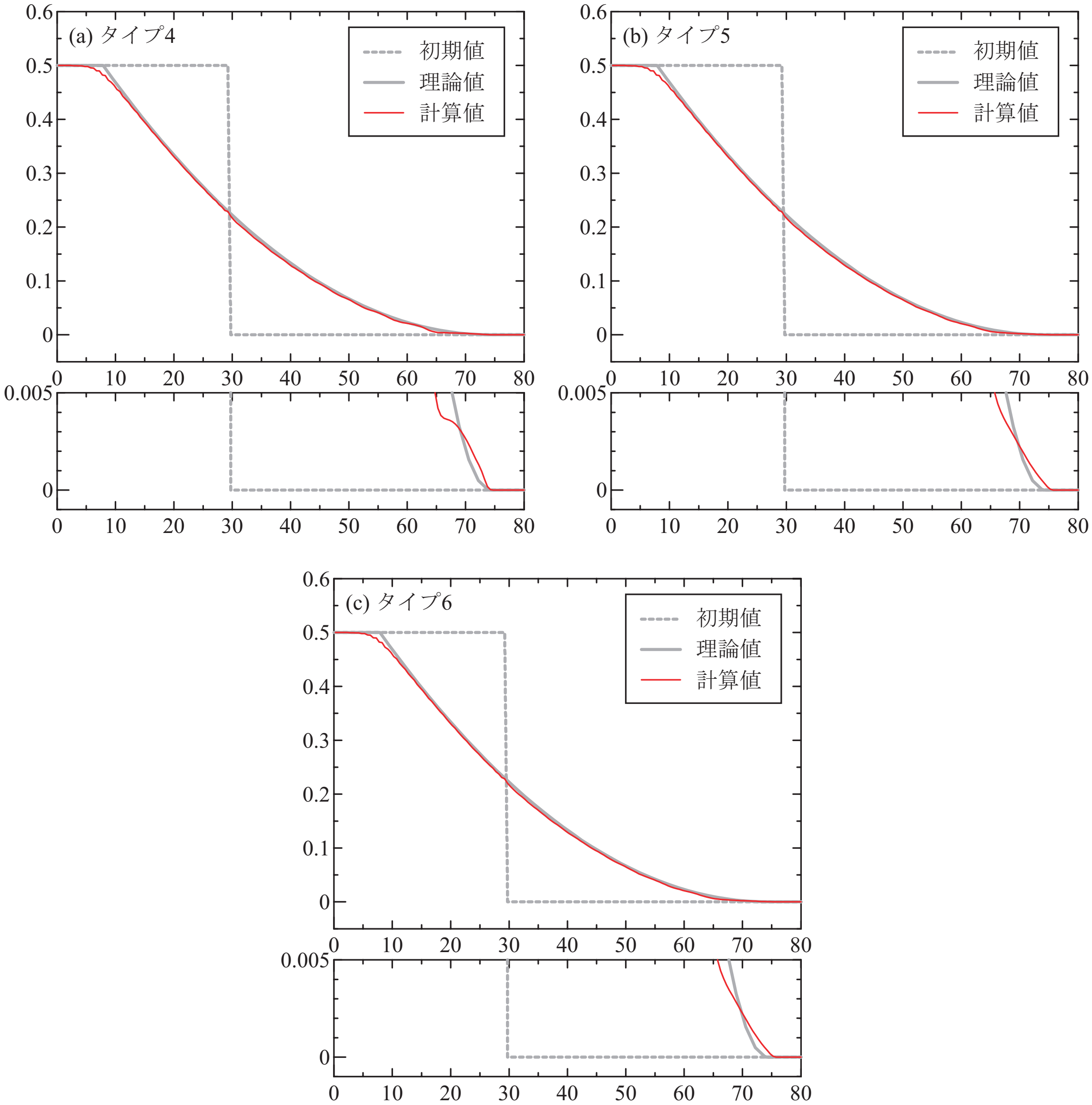


Fig. 18　1 次元ダムブレイク流れのケース 2 に対する理論値と計算値の比較

（横軸：流下方向距離 x_1（m），横軸：水深 h（m））

Theoretical value and simulated value for case 2 of 1 dimensional dam break flow

３　２次元ダムブレイク流れ

ａ　対象

平面２次元流れの数値シミュレーションでは，一般に，CV の対角線方向の流れの計算精度は CV 間の界面に沿う流れよりも低下する傾向にある。そこで，１節で扱った１次元ダムブレイク流れのうちケース１(**Table 3**)を，原点を中心に中央縦断面を回転させることにより発生させた２次元ダムブレイク流れを対象としてシミュレーションを行い，CV の対角線方向の流れの状況を確認することとした。具体的には，x_1，x_2 両軸方向ともに長さを 160m，勾配をゼロとした矩形のシミュレーション領域において，領域の中心(x_1 = 80m，x_2 = 80m)から半径 30m の範囲では水深を 0.5m，その他の範囲では水深を 0.01m となる初期条件を設定した(**Fig.19**(a))。

ｂ　方法

１次元ダムブレイク流れ(Ⅳ ２)と同様に，運動方程式としては式(65)を用い，CV の幅は流下方向 Δx_1 および横断方向 Δx_2 ともに 0.5m，計算時間刻み Δt は 0.005s，陸域と水域との閾値である h_{min} (Ⅱ ３ ｅ)は 1.0×10^{-6}m とした。

ｃ　結果と考察

水面形の数値シミュレーション結果(以下，計算値という)が **Fig.19**(b)，(c)である。代表として x_1 軸方向のクーラン数 C_{r1} (式(66))は，0.1 を超えることはなかった。本図より，正負の段波は領域の中心に対してほぼ同心円状に進行しており，提案する手法では全ての方向についてほぼ同程度の精度が得られることが確認された。また，シミュレーション領域における水の体積の変化を調べると，初期値に対する相対誤差は計算開始から 10 秒後まで常に 10^{-10}% 未満であり，１次元ダムブレイク流れに適用した場合と比較して保存性は殆ど低下していないことも確認された。

４　模擬河川における流れ

ａ　対象

土木学会の水工学委員会基礎水理部会河床変動計算法研究グループが平面２次元流れの数値シミュレーション手法について比較検討を行った，sin-generated curve を元にして幅を適当に変化させ，河床にも適当に凹凸を設定した模擬河川における流れ(水工学委員会基礎水理部会河床変動計算法研究グループ, 2004)をシミュレーションの対象とした。模擬河川の CV 分割と河床コンターは **Fig.20** のように設定されており，上流からの供給流量 0.1m^3/s，Manning の粗度係数 0.01，計算時間刻み 0.01s が指定されている。

ｂ　方法

初期条件として，水面勾配が河床(**Fig.20**(b))の平均勾配と並行となるように，かつ，下流端では水位が後述の境界条件と等しくなるように，水深の初期値を設定した。流速および単位幅流量の初期値については，全ての

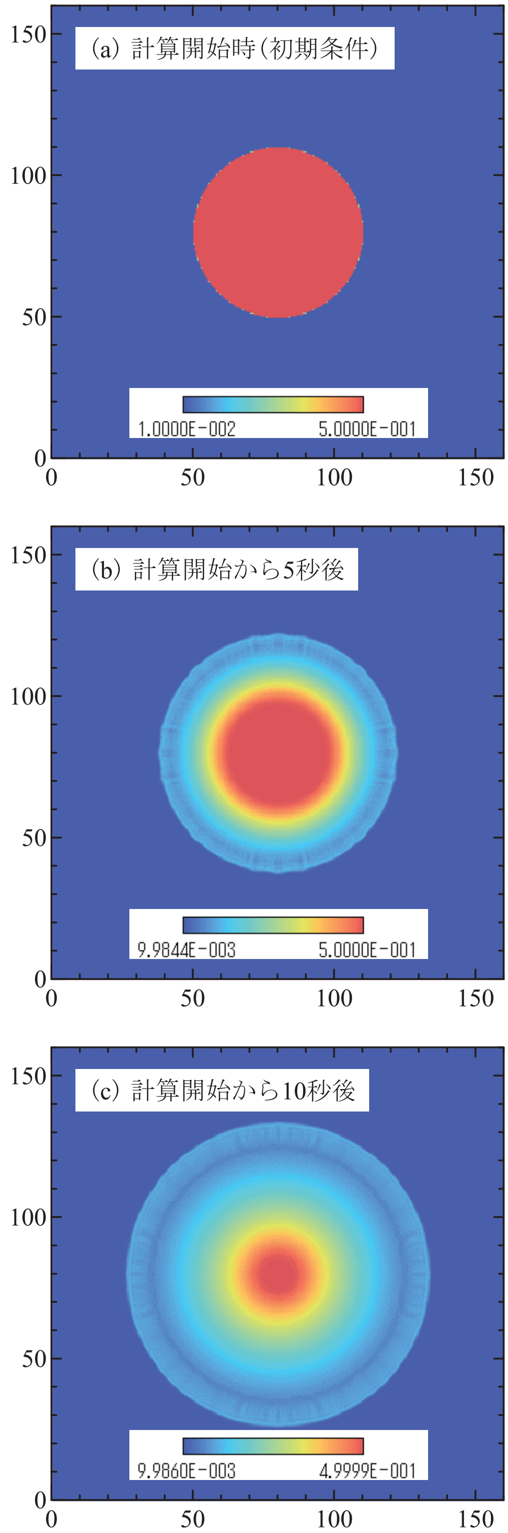


Fig.19　２次元ダムブレイク流れに対する水深分布の計算値
(横軸：x_1 軸方向距離(m)，横軸：x_2 軸方向距離(m))
Simulated water depth distribution for 2 dimensional dam break flow

位置でゼロとした。

境界条件としては，下流端では，水位を -0.145m で一定とするとともに，流量の勾配がゼロとなるように流速および単位幅流量を設定した。上流端では，水面勾配が直下流の CV 間のものと等しくなるように水深を設定す

るとともに，流量が初期値のゼロから前述の所定値まで 180s 間で直線的に増加するように，流速および単位幅流量を調整した。陸域と水域との閾値である h_{min}（Ⅱ 3 e）は，既往の事例（長田，1999；中川，1999；重枝・秋山，2003；前野・小川，2003；川崎ら，2004；内田・河原，2006b，重枝ら，2007）を参考に，実用上，十分な値と考えられる 5.0×10^{-4}m に設定した。

流況は解析開始から 600s でほぼ定常になったが，さらにその 600s 後に終了させた。以降では，数値シミュレーション終了時の流速ベクトルおよび水面形状を計算値として用いる。

c　結果と考察

流速ベクトルの計算値を **Fig.21** に，中央縦断面における水面形状の計算値を **Fig.22** に示す。前述 a の河川流れの数値シミュレーション手法についての比較検討ではⅡ 2 c の手法による計算値は他の手法によるものとほぼ同様の流況となっており（水工学委員会基礎水理部会河床変動計算法研究グループ，2004），代表的と考えられることから，**Fig.21**，**22** にはⅡ 2 c の手法による計算値を併記している。但し，**Fig.21** ではⅡ 2 c の手法による流速ベクトルは CV の角における値であるのに対し，提案する手法によるものでは CV の中心における値である。また，**Fig.22** ではⅡ 2 c の手法による水面形状は中央縦断面に含まれる CV の角における値であるのに対し，提案する手法によるものは中央縦断面の両側にある CV の中心における値の中央縦断面への補間値である。

Fig.21，**22** より，提案する手法による計算値は，Ⅱ 2 c の手法によるものと比較して，渦の位置，水面形状の変曲点，水深のピークの位置やその値等がほぼ等しく，同様の流況となっている。渦の範囲に若干の差が生じているが，前述 a の河川流れの数値シミュレーション手法についての比較検討においてみられる差と同程度である。よって，提案する手法は，河川のように蛇行する流れについて，水工学の分野において現在広く使われている平面 2 次元流れの数値シミュレーション手法とほぼ同様の再現性を有すると考えられる。

5　蛇行水路における河床変動

a　対象

シミュレーションの対象は，西本ら（1992）による蛇行水路における河床変動の実験とした。この実験で用いられる水路の横断形状は矩形であり，平面形状は正弦曲線によって表現され，中央の座標は次式で表される。

$$x_2 = a \sin\left(\frac{2\pi x_1}{L}\right) \tag{67}$$

式（67）における a および L，その他の水路の形状，実験条件については，**Table 5** の通りである。

b　方法

シミュレーション領域の CV 分割は，**Fig.23** のように行った。CV の数は ξ^1，ξ^2 軸方向のそれぞれで 88，16 である。なお，本図において赤線で示す断面 A ～ D は，後に計算値と実験値との比較を行う断面である。

計算時間刻み Δt は 0.01s とした。陸域と水域との閾値である h_{min}（Ⅱ 3 e）はⅣ 4 と同様に 5.0×10^{-4}m とした。底面摩擦応力（掃流力）の計算に用いる係数（Ⅲ 1 b (3)），流線方向の掃流砂量の計算式（Ⅲ 1 b (1)），流線と直交する方向の掃流砂量式である長谷川の式で用いられる係数 N_*（Ⅲ 1 c）には，**Table 6** の 8 タイプを設定した。なお，**Table 5** の粒径の砂礫を対象とすると，式（46）によ

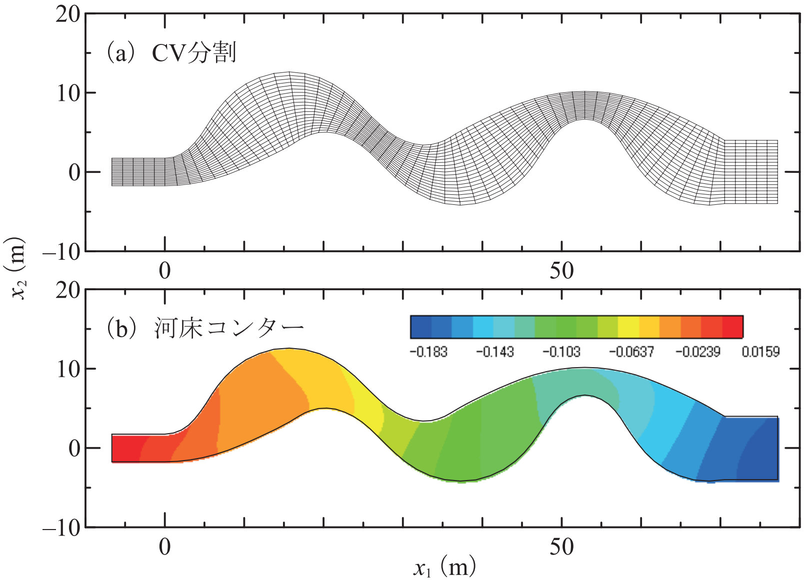


Fig. 20　シミュレーション領域に対する CV 分割と河床コンター
Control volume partitioning and bed elevation contour for simulation area

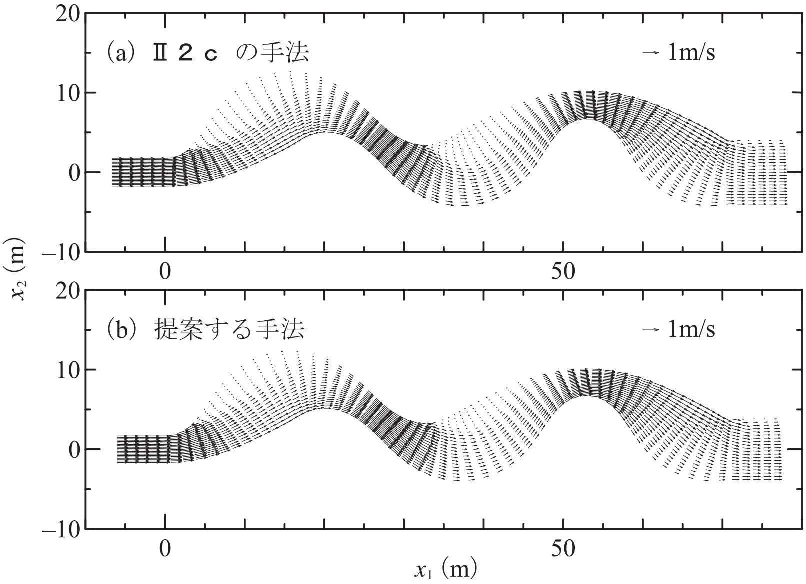


Fig. 21　流速ベクトルの計算値（Ⅱ２ｃの手法による流速ベクトルは水工学委員会基礎水理部会河床変動計算法研究グループ（2004）から引用）

Simulated flow vector

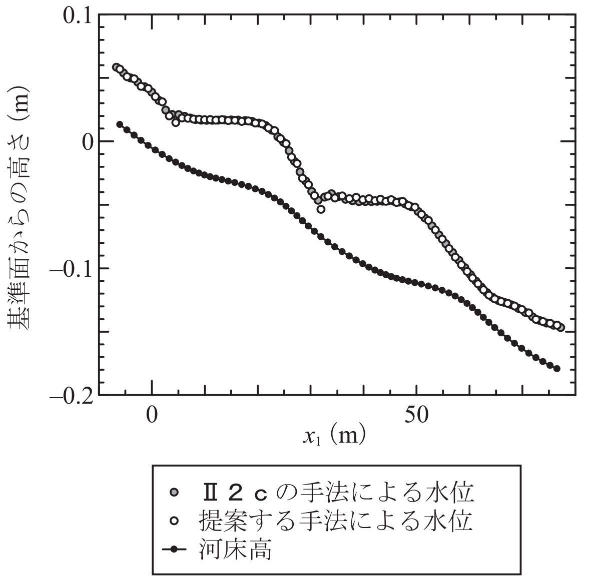


Fig. 22　中央縦断面における水面形状の計算値（Ⅱ２ｃの手法による水位は水工学委員会基礎水理部会河床変動計算法研究グループ（2004）から引用）

Simulated water depth in central longitudinal section

る粗度係数と式（47）および（48）から逆算した粗度係数には **Fig.24** のような特性の違いがあり，芦田・道上の式と MPM 式による掃流砂量には **Fig.25** のような特性の違いがある。

初期条件としては，河床勾配を所定値で一様，水深を全ての箇所で後述の一定値，流速を全ての箇所でゼロ，重力加速度 g をゼロとした。そして，計算開始から 60s で g を 9.8m/s^2 まで線形で増加させた。水深の初期値については，所定の通水時間経過後の流量が所定値となるように試行錯誤で定めた。計算値には，所定の通水時間経過直後の値を用いた。

ｃ　結果と考察

まず，**Fig.23** に示した断面 A ～ D における河床形状を対象として，実験値とシミュレーション結果（以下，計算値という）を比較した（**Fig.26**）。これより，$N_* = 7.0$ とするタイプ 1 ～ 4 を適用した場合は，①断面 A の右岸側の堆砂域では河床は初期値から上昇せず，逆に低下するものもある，②断面 A の左岸側の洗掘域では河床は初期値から低下せず，逆に上昇するものもある，③断面 D の右岸側では実験値に見られない堆砂が生じる，④断面 D の左岸側では実験値に見られない大きな河床の低下が生じる等，実験値と比較して堆砂域と洗掘域の位置が流下方向にずれる，すなわち，河床形状の位相がずれる傾向が確認された。一方，$N_* = 11.5$ とするタイプ 5 ～ 8 を適用した場合は，②と④は生じるものの，タイプ 1 ～ 4 よりも河床形状の位相のずれは小さいと考えられる。しかしながら，タイプ 5 ～ 8 の中でも，タイプ 6 を適用した場合には③が生じ，他のタイプよりも再現性が低かった。タイプ 5，7，8 による計算値には大きな違いはみられなかった。

そこで次に，シミュレーション領域全体における河床形状を対象として，実験値（**Fig.27**）とタイプ 5，7，8 による計算値（**Fig.28**）を比較した。いずれの計算値も実験で生じた河床変動の傾向を捉えていると考えられる。ここで堆砂域に着目すると，タイプ 5，7，8 の順で実験値に対する位相のずれが大きくなっており，これらの 3 タイプの中ではタイプ 5 による再現性が最も高いことが確

Table 5　水路の形状と実験条件（西本ら，1992）

Shape of channel and experimental condition

諸元（単位）	値
振幅 a（m）	0.28
波長 L（m）	4.40
水路幅 B（m）	0.35
初期河床勾配（－）	0.006
河床材料の平均粒径（m）	0.00076
流量（m^3/s）	0.00139
通水時間（s）	14,400（=4 h）

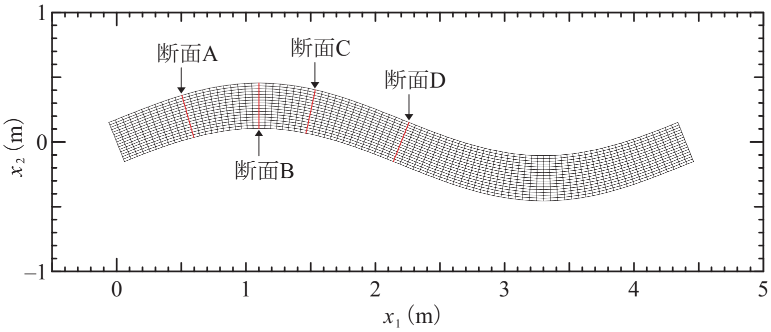


Fig. 23　シミュレーション領域に対する CV 分割（88 × 16）

Control volume partitioning for simulation area (88 × 16)

Table 6　蛇行水路における河床変動のシミュレーションにおける計算方法と計算条件

Calculation method and condition for simulation of bed variation in meandering channel

タイプ	底面摩擦応力（掃流力）の計算に用いる係数	掃流砂量の計算式	N_*
1	Manning の粗度係数（式(46)）	芦田・道上の式（式(39)）	7.0
2	抵抗係数（式(47)および(48)）	芦田・道上の式（式(39)）	7.0
3	Manning の粗度係数（式(46)）	MPM 式（式(40)）	7.0
4	抵抗係数（式(47)および(48)）	MPM 式（式(40)）	7.0
5	Manning の粗度係数（式(46)）	芦田・道上の式（式(39)）	11.5
6	抵抗係数（式(47)および(48)）	芦田・道上の式（式(39)）	11.5
7	Manning の粗度係数（式(46)）	MPM 式（式(40)）	11.5
8	抵抗係数（式(47)および(48)）	MPM 式（式(40)）	11.5

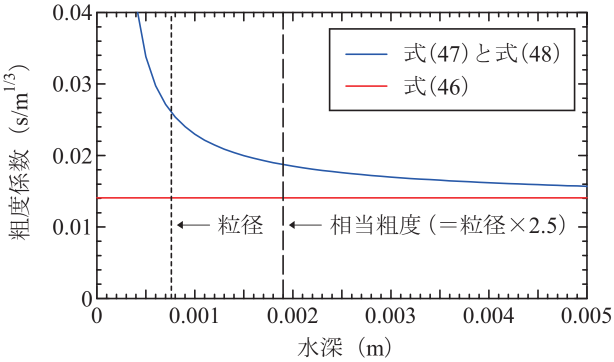


Fig. 24　粗度係数の特性

Characteristics of roughness coefficient

認された。このタイプによる再現性は，既往の事例における計算値（西本ら, 1992）と同程度であると考えられる。提案する数値シミュレーション手法は，農業水利の分野において比較的容易に普及しうることを目的として，簡便さを重視して選択した個別の手法を組み合わせたものであること（**Table 2**）を踏まえると，最低限のレベルをクリアしていると考えられる。

従って，タイプ1～8の中ではタイプ5が最適と考えられ，底面摩擦応力（掃流力）の計算には式(46)による粗度係数，流線方向の掃流砂量の計算には芦田･道上の式，流線と直交する方向の掃流砂量式である長谷川の式で用いられる係数 N_* には11.5を採用することを提案する。

ここで，タイプ5による流速ベクトルと水深分布の計算値をそれぞれ **Fig.29**，**30** に示す。これより，湾曲部の内岸側において水深が h_{min}（5.0×10^{-4}m）となる，すなわち，陸域となる領域が生じているが，その周辺の流れに非現実的な振動が生じている様子はみられない。初期条件では領域全体を水域としているため，この陸域は計算の過程で発生したものであることから，陸域の拡大に伴って水際境界が変動しても，シミュレーションが安定して進行していたことがわかる。

また，タイプ5を含む全てのタイプによる河床形状の計算値においても非現実的な振動が生じていないのは，掃流砂量の一般座標系成分をCV間の界面に補間する際，ドナースキームに倣ったこと（Ⅲ 3）によると考えられる。さらに，実験で生じた河床変動の傾向を捉えられたことから，流線と直交する方向の掃流砂量式である長谷川の式で用いられる流線の曲率半径（Ⅲ 1 c）として，流路の曲率半径を用いることに，大きな問題がなかったことが確認された。

但し，本節による検討結果は，一つの実験結果を対象としたものである。また，河川等の現場を対象とした河床変動の数値シミュレーションに適用する際には，現地で流砂量の観測を行い，その結果に適合するよう流砂量式を修正して用いることが必要な場合もあると指摘されている（福岡，2005）。これらのことを踏まえると，今後は実際の河川に造成された頭首工周辺に適用し，実用面での問題点を明らかにするとともに，その解決方法を示す必要がある。その際には，係数の値を修正したり，個別の手法をより精度の高いものに変更させること等についても検討しなければならない可能性がある。

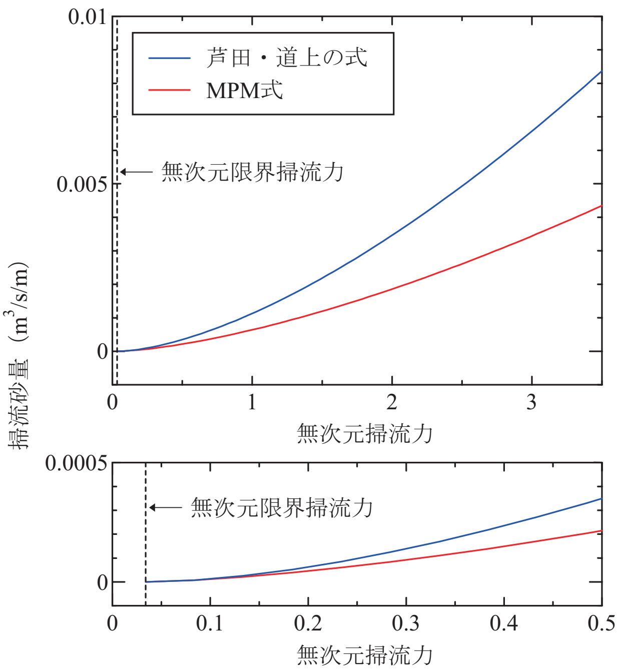


Fig. 25　掃流砂量式の特性

Characteristics of bed load formula

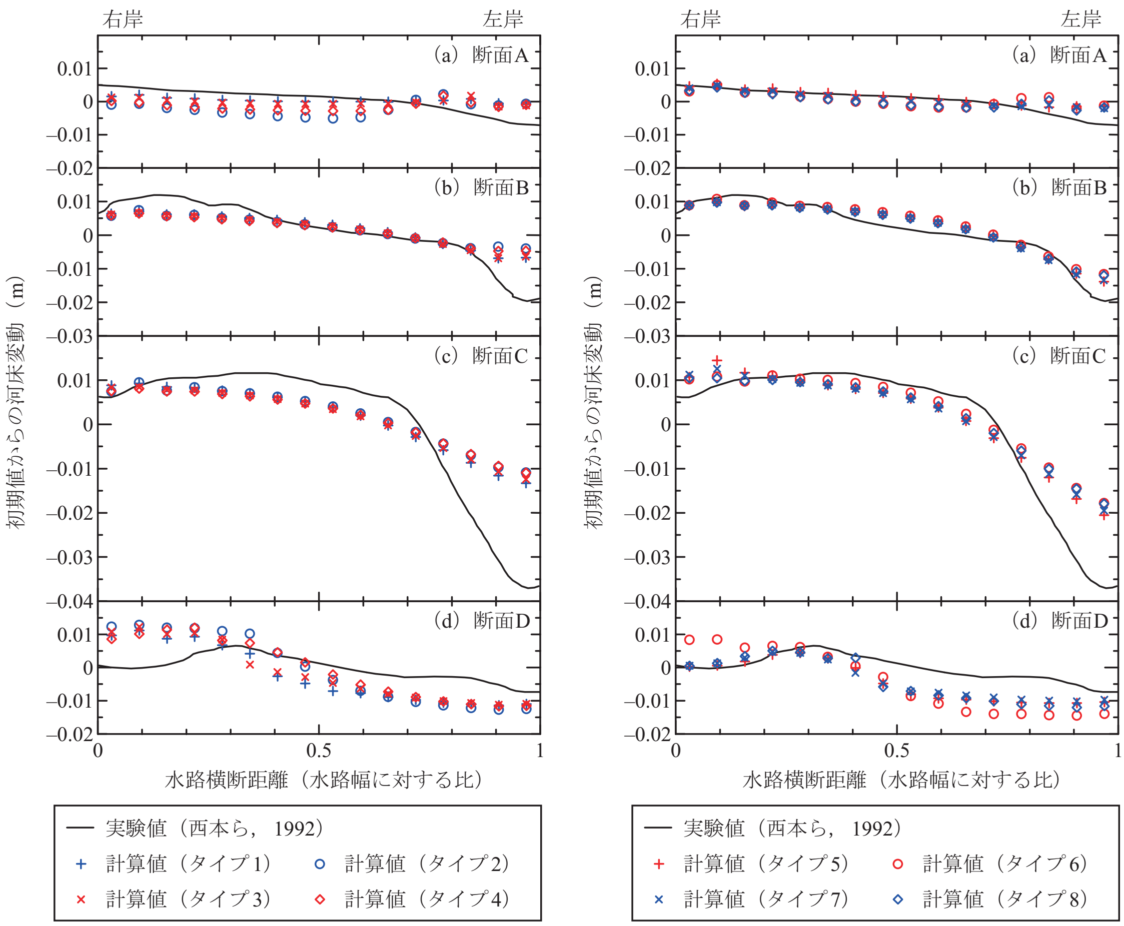


Fig. 26　断面 A ～ D における河床形状の実験値と計算値

Experimental and simulated river bed forms at cross section A to D

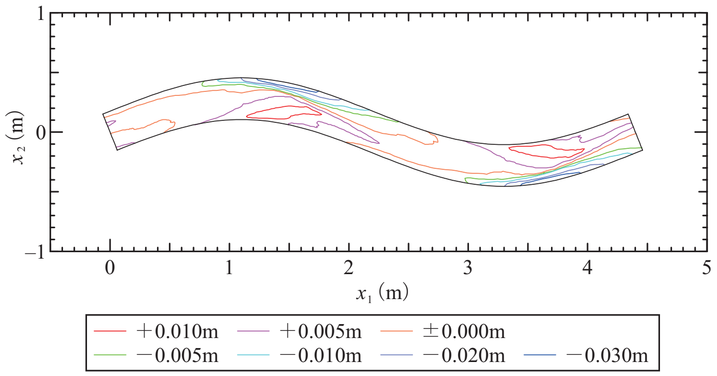


Fig. 27　河床形状の実験値(西本ら, 1992)

Experimental river bed forms

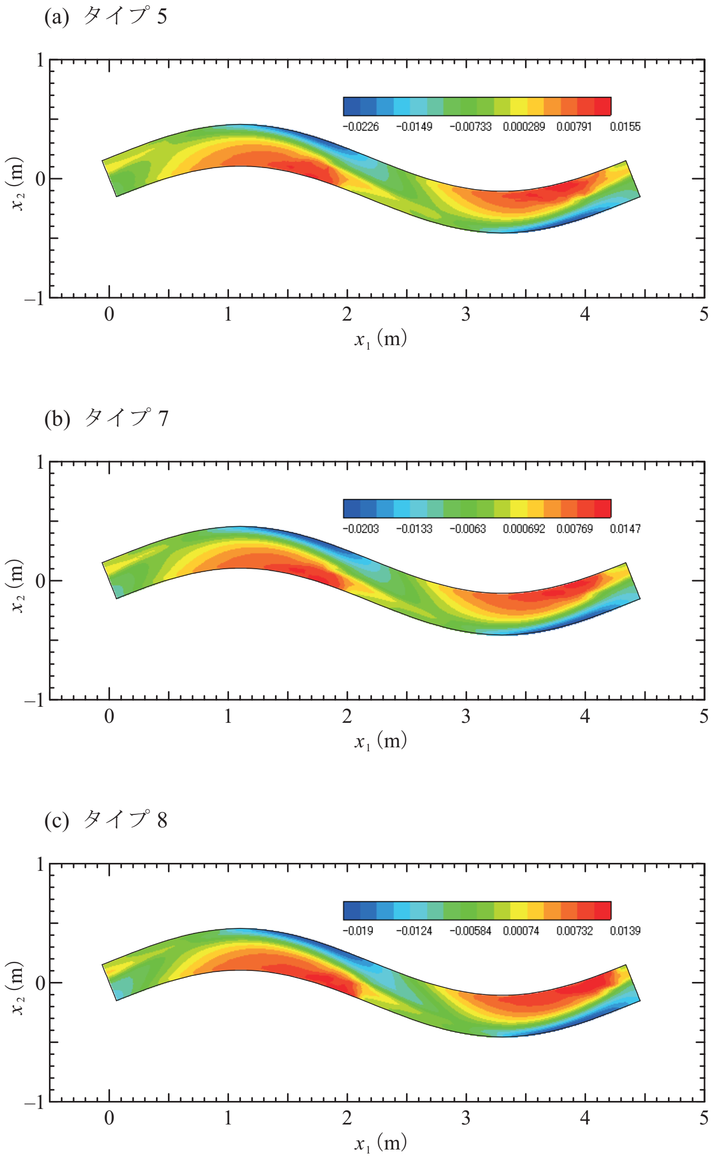


Fig. 28　河床形状の計算値

Simulated river bed forms

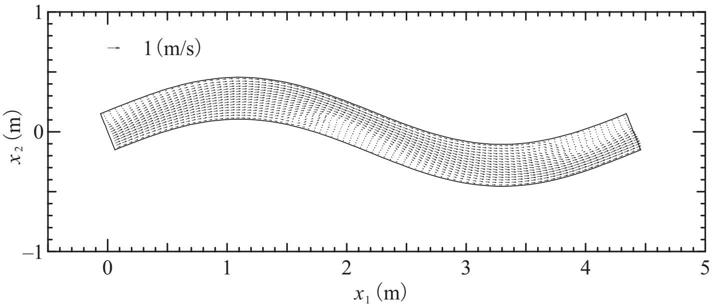


Fig. 29　タイプ 5 を適用した場合の流速ベクトルの計算値

Simulated flow vector using type 5

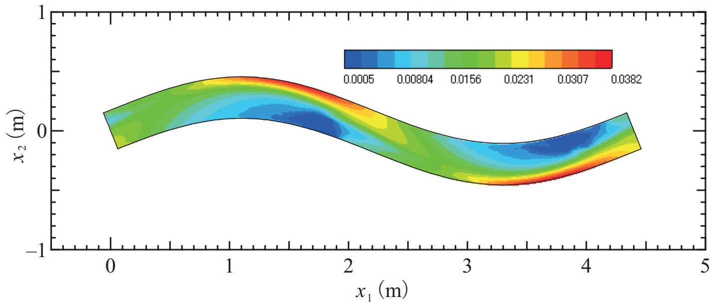


Fig. 30　タイプ 5 を適用した場合の水深分布の計算値
Simulated water depth distribution using type 5

Ⅴ　結　言

本報告では，一般座標系における平面 2 次元流れと河床変動の数値シミュレーションについて，水工学の分野における既往の手法で適用されている基礎方程式，変数の配置方法，計算方法等の詳細を示すとともに，それらの比較検討を行い，農業水利の分野において比較的容易に普及しうると考えられる手法を提案した。その詳細は，以下の通りである。

(1) 基礎方程式は，基本変数にデカルト座標物理成分，対流速度に一般座標反変成分を用いる型式とする。変数の配置方法は，流体力学の数値シミュレーションで適用されているコロケート配置に倣った方法とする。具体的には，コントロールボリューム（以下，CV とする）の中心にデカルト座標物理成分を配置し，CV 間の界面に一般座標反変成分を配置する。

(2) 基礎方程式の離散化手法は有限差分法とし，運動方程式の対流項には QUICK 法，時間微分項には修正オイラー法を適用する。計算の順序としては，流体力学の数値シミュレーションで適用されている部分段階法に準じたものとする。具体的には，まず，CV の中心において，水面勾配項を除いた運動方程式から次の時間ステップの単位幅流量の推定値を算出する。次に，これをその位置で座標変換した後, CV 間の界面で補間する。そして，この値に対して，CV 間の界面で評価された水面勾配項を座標変換したものを付加する。さらに，先に算出した単位幅流量の推定値に対して，運動方程式に含まれる水面勾配項を付加する。

(3) 水際境界における処理方法としては，まず，水深がある閾値を下回る CV を陸域として運動方程式の計算の対象外とする。さらに，ある CV を対象に水面勾配項を計算する際，陸域となり，かつその地盤高が当該 CV の水位よりも高い CV の値を用いないこととする。これらにより，陸域 CV 間では水の移動が生じず，水域陸域 CV 間では，水域から陸域への水の移動は生じるが，陸域から水域への水の移動は生じないことになる。

(4) Manning の粗度係数は，河床材料の粒径による関数としての計算式から求める。縦断方向すなわち流線方向の掃流砂量式には芦田・道上の式を用いる。流線と直交する方向の掃流砂量式には長谷川の式を用い，流線の曲率半径には流路の曲率半径を適用し，N_* と表記される係数の値としては 11.5 とする。

(5) 掃流砂量の一般座標系成分を CV 間の界面に補間する際，運動方程式の対流項の離散化において適用されるドナースキームに倣い，上流側に重みを置いた方法を用いる。その係数は 0.2 で十分である。

これらは，個別の方法として最も精度が高いものを選択して組み合わせたものではない。しかしながら，その組み合わせが妥当であったため，常流と射流が混在する流れ，水位の不連続部を有する流れ，蛇行する流れ，堆砂が生じて陸域が拡大するような河床変動に対して安定して解析できるとともに，許容されうる再現性が得られたと考えられる。

但し，本報告で提案する内容は，一般座標系における平面 2 次元流れと河床変動の数値シミュレーションの中でも，基礎的な部分を対象としている。そこで今後の課題として，本報告の手法を実際の河川に造成された頭首工周辺に適用し，実用面での問題点を明らかにするとともに，その解決方法を示す必要がある。そして，農業水利の分野の中で，頭首工の建設や改修等に係る調査設計や性能照査における堆砂や洗掘等の予測および対策の検討手段の一つとして，一般座標系における平面 2 次元流れと河床変動の数値シミュレーションを普及させることが望まれる。

参考文献

1) Chang, L.J., Shimizu, Y.(2005): Numerical simulations of behavior of alternate bars with different bank strengths, *J. of Hydraulic Reserch*, 596-612
2) 土木学会(1999)：水理公式集[平成11年版]，土木学会
3) 土木学会(2002)：CD-ROM水理公式集例題プログラム集 第2編河川編
4) Engelund, F.(1974): Flow and bed topography in channel bends, *Journal of the Hydraulics Division*, ASCE, 100, HY11, 1631-1648
5) 福岡捷二・西村達也・高橋晃・川口昭人・岡信昌利(1998)：越流型水制工の設計法の研究，土木学会論文集，593，Ⅱ-43，51-68
6) 福岡捷二・海野修司・成田一郎・辰野剛志・西本直史(2004)：多摩川二ヶ領宿河原堰の改築による堆積土砂の移動，水工学論文集，48，1081-1086
7) 福岡捷二・渡邊明英・原俊彦・秋山正人(2004)：水面形の時間変化と非定常二次元解析を用いた洪水流量ハイドログラフと貯留量の高精度計算，土木学会論文集，761，Ⅱ-67，45-56
8) 福岡捷二(2005)：洪水の水理と河道の設計法，森北出版
9) 北海道河川防災研究センター(2008)，http://ws3-er.eng.hokudai.ac.jp/yasu/hendou/Nays/index_j.htm
10) 本間仁・安芸皎一編(1962)：物部水理学，岩波書店
11) 細川尚(2002)：河川流のモデリングと河床・河道変動解析の進歩，第38回水工学に関する夏期研修会講義集，A-2-1 − A-2-22
12) 伊東祐一郎・清水康行(2003)：浮遊砂混在平面2次元一般座標モデルと石狩川模型実験の再現計算によるその検証，水工学論文集，47，661-666
13) 梶島岳夫(1999)：乱流の数値シミュレーション，養賢堂
14) 川崎浩司・小野稔和・Napaporn, P.N.・熱田浩史・中辻啓二(2004)：CIP法とSMAC法につづく平面2次元氾濫流モデルの構築，水工学論文集，48，565-570
15) 川島幹雄・福岡捷二(1995)：床止め工周辺の河床変動計算法に関する研究，水工学論文集，39，689-694
16) 建設省河川局監修(1997)：改訂新版 建設省河川茶房技術基準(案)同解説 調査編，山海堂
17) 吉川秀夫(1985)：流砂の水理学，丸善
18) 国土技術研究センター(2006)，http://www.jice.or.jp/sim/t1/200609010.html
19) 越塚誠一(1997)：数値流体力学，培風館
20) 前野詩朗・小川信(2003)：非構造格子有限体積法による水理構造物周辺流れの数値解析，応用力学論文集，6，857-864
21) 弁甚甲介・清水康行(2005)：河川合流点を含む流れに関する研究，水工学論文集，49，529-534
22) 崇田徳彦・清水康行(1994)：河川構造物周辺の流れと河床変動計算について，都市域急流河川の流れと河床変動解析に関するシンポジウム，土木学会，381-385
23) 長田信寿・細田尚・村本嘉雄・Md. Munsur Rahman (1996)：移動一般座標系による側岸侵食を伴う過動変動の数値解析，水工学論文集，40，927-932
24) 長田信寿・細田尚・村本嘉雄・Md. Munsur Rahman (1997)：河岸侵食過程における流砂の非平衡性を考慮した流路変動の数値解析，水工学論文集，41，889-894
25) 長田信寿(1999)：一般座標系を用いた平面2次元非定常流れの数値解析，水工学における計算機利用の講習会講義集，土木学会水理委員会基礎水理部会，61-76
26) 中川一(1999)：氾濫流の解析，水工学における計算機利用の講習会講義集，土木学会水理委員会基礎水理部会，43-50
27) 浪平篤・髙木強治(2009)：一般座標系平面2次元流れへのコロケート格子による非圧縮性流体の数値解析手法の適用，応用力学論文集，12，711-718
28) 西本直史・清水康行・青木敬三(1992)：流線の曲率を考慮した蛇行水路の河床変動計算，土木学会論文集，456，Ⅱ-21，11-20
29) 農業農村工学会(2010a)：改訂七版 農業農村工学ハンドブック 本編，373-406
30) 農業農村工学会(2010b)：改訂七版 農業農村工学ハンドブック 基礎編，203-240
31) 農林水産省農村振興局整備部設計課監修(2009)：土地改良事業計画設計基準及び運用・解説 設計「頭首工」，農業農村工学会，176-191
32) 小川義忠・伊東覚・西本直史・三浦真貴雄・劉富山(1999)：二次元河床変動解析の現地への適用に関する研究，水工学論文集，43，701-706
33) 関根正人(2005)：移動床流れの水理学，共立出版
34) 重枝未玲・秋山壽一郎(2003)：複雑な地形起伏を有する場における氾濫流の数値シミュレーション，水工学論文集，47，871-876
35) 重枝未玲・秋山壽一郎・重岡広美(2007)：ドライ・ウェット状態となる地形起伏がある場での氾濫流の数値シミュレーション，水工学論文集，51，781-786
36) 山下恭正・山下彰司・崇田徳彦・清水康行(1991)：一般座標系を用いた常・射流混在流れの計算，開発土木研究所月報，18-33
37) Shimizu, Y., Itakura, T. (1991)：Calculation of Flow and Bed Deformation with a General Non-orthogonalcoodinate System, *Proc. of XXIV IAAR Cong.*, Madrid, h3, 301-308
38) 清水康行・藤田陸博・平野道夫(1999)：連続床止め工を有する複断面河道における流れと河床変動の計算，水工学論文集，43，683-698
39) 清水康行(2003)：河道平面形状の形成における河床・河岸の変動特性の相互関係について，水工学論文集，47，643-648
40) 水工学委員会基礎水理部会河床変動計算法研究グループ(2004)：http://www.civil.hokudai.ac.jp/yasu/hendou/index.htm
41) 忠津哲也・内田龍彦・石川武彦・福岡捷二(2010)：洪水中の砂州の変形と河川構造物周辺の局所洗掘，水工学論文集，54，829-834
42) 竹林洋史(2005)：沖積河川の地形予測技術と治水対策への利用，2005年度(第41回)水工学に関する夏期研修会講義集 Aコース，A-6-1 − A-6-17
43) 内田龍彦・河原能久(2006a)：任意の境界形状を有する二次元浅水流の高精度解析手法の開発，水工学論文集，50，799-804
44) 内田龍彦・河原能久(2006b)：二次元浅水流の保存型CIP陽解法の開発とその検証，応用力学論文集，9，917-924

45) Ven, T.C. 著；石原藤次郎訳(1962)：開水路の水理学Ⅰ，丸善
46) 渡邊明英・福岡捷二・Alex G. M.・太田勝(2002)：複断面蛇行河道におけるハイドログラフの変形と河道内貯留の非定常 2 次元解析，水工学論文集，46，427-432
47) 矢部孝・内海隆行・尾形陽一(2003)：CIP 法，森北出版

Comparative Study on Numerical Simulation Method for Depth-averaged Flow and River Bed Variation in Generalized Coordinate System

NAMIHIRA Atsushi, TAKAKI Kyoji, GOTO Masahiro and KOBAYASHI Hiroyasu

Summary

Numerical simulation method for depth-averaged flow and river bed variation in generalized coordinate system has not spread in the field about irrigation, drainage and rural engineering, although the method is thought to be very useful for the design and the performance verification in construction and improvement of Headworks. These causes are considered that the form of fundamental equation and the arrangement of variables are not unified and that the details of the calculation method are not expressed clearly. In this paper, the existing methods in the field about hydraulic engineering are compared, and the method thought to be spread easily in the field about irrigation, drainage and rural engineering is proposed. Furthermore, accuracy and stability of the proposed method are confirmed to be enough for application to fundamental phenomenon as numerical simulation method for depth-averaged flow and river bed variation in generalized coordinate system. As subjects in future, it is necessary to apply this method to actual rivers including Headworks and to clarify problems and their solutions in application to field, in order to make this method spread in the field about irrigation, drainage and rural engineering.

Keywords: generalized coordinate system, depth-averaged flow, river bed variation, numerical simulation